Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Stefan Volkwein
Martin Gubisch, Sabrina Rogg
Wintersemester 2015/2016

Ausgabe: Freitag, 30.10.2015
Abgabe: Freitag, 06.11.2015, 10:00 Uhr, Büro G413

POD für linear-quadratische Optimalsteuerung
1. Übungsblatt

☐ **Aufgabe 1** (Adjungierte Operatoren in Hilberträumen) (5 Punkte)

Seien H_1, H_2 reelle Hilberträume, $T \in \mathscr{L}(H_1, H_2)$ mit Adjungierter $T' : H_2' \to H_1'$ und bezeichne $J_i : H_i \to H_i'$ den Riesz-Isomorphismus $\langle J_i x, y \rangle_{H_i', H_i} = \langle x, y \rangle_{H_i}$ für $x, y \in H_i$, $i = 1, 2$.

1. Zeigen Sie, dass für $T^\star = J_1^{-1} T' J_2 : H_2 \to H_1$ gilt:
$$\forall x \in H_1 : \forall y \in H_2 : \langle T^\star y, x \rangle_{H_1} = \langle y, Tx \rangle_{H_2}.$$
2. Zeigen Sie, dass $(T^\star)^\star = T$ erfüllt ist.

☐ **Aufgabe 2** (Variationsformulierungen für Randwertprobleme) (5 Punkte)

Seien $\Theta = (0, T) \subseteq \mathbb{R}$ ein Zeitintervall, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ ein reguläres Gebiet und $f \in L^2(\Theta \times \Omega)$, $g \in L^2(\Theta \times \partial\Omega)$, $y_\circ \in L^2(\Omega)$. Weiter seien $\alpha > 0$ und $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

Betrachten Sie die Neumannsche Anfangs-Randwert-Aufgabe
$$\begin{aligned} y_t(t,x) - \alpha \Delta_x y(t,x) + \beta y(t,x) &= f(t,x) && \text{für } (t,x) \in \Theta \times \Omega \\ (\partial y / \partial \vec{\nu})(t,\xi) + \gamma y(t,\xi) &= g(t,\xi) && \text{für } (t,\xi) \in \Theta \times \partial\Omega \\ y(0,x) &= y_\circ(x) && \text{für } x \in \Omega. \end{aligned}$$

1. Formulieren Sie das Problem als Variationsgleichung für schwache Lösungen
$$y \in L^2(\Theta \times \Omega) \text{ mit } y_t \in L^2(\Theta \times \Omega) \text{ und } \nabla_x y \in L^2(\Theta \times \Omega)^d.$$
2. Formulieren Sie das Problem als Variationsgleichung für schwache Lösungen
$$y \in L^2(\Theta \times \Omega) \text{ mit } \nabla_x y \in L^2(\Theta \times \Omega)^d,$$
d.h. elimieren Sie die in (1) auftretende Zeitableitung durch Wahl geeigneter Testfunktionen.

☐ **Aufgabe 3** (Erweiterung von POD-Basen) (5 Punkte)

Seien $\mathcal{X}$ ein Hilbertraum und $y \in C^0(\Theta, \mathcal{X})$.

Zeigen Sie, dass eine Rang-ℓ POD-Basis $\{\psi_1, ..., \psi_\ell\}$ durch eine Lösung $\psi_{\ell+1}$ von
$$\max_{\psi \in \operatorname{span}(\psi_1, ..., \psi_\ell)^\perp} \int_\Theta \langle y(t), \psi \rangle_{\mathcal{X}}^2 \, \mathrm{d}t$$
zu einer Rang-$(\ell+1)$ POD-Basis $\{\psi_1, ..., \psi_{\ell+1}\}$ erweitert werden kann.

☐ **Aufgabe 4** (Unkorreliertheit der POD-Elemente) (5 Punkte)

Sei $y \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und sei $\{\psi_1, ..., \psi_\ell\} \subseteq \mathbb{R}^m$ eine Rang-ℓ POD-Basis zu y bzgl. des Standard-Skalarprodukts $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^m}$ mit zugehörigen Singulärwerten $\sigma_1, ..., \sigma_\ell$.

Zeigen Sie:
$$\sum_{j=1}^n \langle y_j, \psi_k \rangle_{\mathbb{R}^m} \langle y_j, \psi_l \rangle_{\mathbb{R}^m} = \sigma_l^2 \delta_{kl} \text{ für alle } k, l = 1, ..., \ell.$$