Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Stefan Volkwein
Martin Gubisch, Sabrina Rogg
Wintersemester 2015/2016

Ausgabe: Freitag, 13.10.2015
Abgabe: Freitag, 20.11.2015, 10:00 Uhr, Büro G413

POD für linear-quadratische Optimalsteuerung
2. Übungsblatt – Theorieteil

☐ **Aufgabe 5** (Frobenius-Norm) (5 Punkte)

1. Zeigen Sie, dass die Frobenius-Norm

$$\|A\|_{\mathrm{F}} = \left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\mathrm{spur}(AA^{\mathrm{T}})} = \sqrt{\mathrm{spur}(A^{\mathrm{T}}A)}$$

   eine Norm auf dem Vektorraum der reellen $(m \times n)$-Matrizen definiert.
2. Zeigen Sie, dass für alle $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und $B \in \mathbb{R}^{n\times o}$ gilt: $\|AB\|_{\mathrm{F}} \le \|A\|_{\mathrm{F}}\|B\|_{\mathrm{F}}$.
3. Sei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ vom Rang d und bestehe $U \in \mathbb{R}^{d\times m}$ aus orthonormalen Spalten. Zeigen Sie: $\|UA\|_{\mathrm{F}} = \|A\|_{\mathrm{F}}$.
4. Definieren Sie ein Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathrm{F}}$ auf $\mathbb{R}^{m\times n}$, sodass $\|\cdot\|_{\mathrm{F}}$ die von $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathrm{F}}$ *induzierte Norm* ist.
5. Habe A den Rang 1. Zeigen Sie, dass Vektoren $x \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}^n$ existieren mit $A = x^{\mathrm{T}}y$ und $\|A\|_{\mathrm{F}} = \|x\|_2\|y\|_2$.

☐ **Aufgabe 6** (Frobenius-Norm und Operatornorm) (5 Punkte)

1. Zeigen Sie, dass für die zur *euklidischen Norm* $\|\cdot\|_2$ gehörige *Operatornorm* $\|\cdot\|_2$ auf $\mathbb{R}^{m\times n}$, definiert durch $\|A\|_2 = \max\{\|Ax\|_2 \mid \|x\|_2 = 1\}$ gilt: $\|A\|_2^2 = \mu_1$, wobei $\mu_1 \ge \cdots \ge \mu_n$ die Eigenwerte von $A^{\mathrm{T}}A$ sind.
2. Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ invertierbar. Zeigen Sie: $\|A^{-1}\|_2^2$ ist der Kehrwert von μ_n.
3. Zeigen Sie, dass für alle $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und $x \in \mathbb{R}^n$ gilt $\|Ax\|_2 \le \|A\|_{\mathrm{F}}\|x\|_2$.
4. Zeigen Sie, dass für alle $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ stets $\|A\|_2 \le \|A\|_{\mathrm{F}} \le \sqrt{n}\|A\|_2$ erfüllt ist.
5. Identifizieren Sie die Menge aller Matrizen $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, für die gilt $\|A\|_2 = \|A\|_{\mathrm{F}}$.

Hinweis: In Aufgabe 8 soll dann gezeigt werden, dass die POD-Basis optimale Approximationen bzgl. der Frobenius-Norm liefert.

☐ **Aufgabe 7** (Finite-Differenzen-Methode) (5 Punkte)

Seien $\Omega = [a_x, b_x] \times [a_y, b_y] \subseteq \mathbb{R}^2$ und $\Theta = (0,T) \subseteq \mathbb{R}$. Wir betrachten die lineare Wärmeleitungsgleichung

$$\begin{aligned} \dot z(t;x,y) - \sigma\Delta z(t;x,y) &= f(t;x,y) && \text{in } \Theta\times\Omega,\\ z(t;x,y) &= g(t;x,y) && \text{in } \Theta\times\partial\Omega\\ z(0;x,y) &= z_0(x,y) && \text{in } \Omega \end{aligned}$$

mit $f,g : \Theta\times\Omega \to \mathbb{R}$, $z_0 : \Omega \to \mathbb{R}$ und $\sigma > 0$. Seien $\mathrm{x} = (x_0, ..., x_{N_x+1}) \in \mathbb{R}^{N_x+2}$, $\mathrm{y} = (y_0, ..., y_{N_y+1}) \in \mathbb{R}^{N_y+2}$ äquidistante Diskretisierungen der Ortsvariablen x, y.

1. Diskretisieren Sie die Differenzialgleichung mittels der Finite-Differenzen-Methode im Ort und stellen Sie das zugehörige System gewöhnlicher Differenzialgleichungen

$$\Phi\dot{\mathrm{z}}(t) + \Psi\mathrm{z}(t) = \mathrm{f}(t) \text{ in } \Theta, \qquad \Phi\mathrm{z}(0) = \mathrm{z}_0$$

   auf, d.h. finden Sie $\Phi, \Psi \in \mathbb{R}^{N_xN_y\times N_xN_y}$ und $\mathrm{f}(t), \mathrm{z}_0 \in \mathbb{R}^{N_xN_y}$ mit $\mathrm{z}_{ij}(t) \approx z(t;x_i,y_j)$. Beachten Sie: $\mathrm{z} \notin \mathbb{R}^{N_x\times N_y}$, sondern $\mathrm{z} = (\mathrm{z}_{11}, ..., \mathrm{z}_{1n}, ..., ..., \mathrm{z}_{m1}, ..., \mathrm{z}_{mn}) \in \mathbb{R}^{N_xN_y}$ lexikographisch geordnet.
2. Formulieren Sie für das System das explizite Euler-Verfahren, das implizite Euler-Verfahren und das Crank-Nicolson-Verfahren. Sind die Methoden wohldefiniert, d.h. besitzen die zugehörigen linearen Gleichungssysteme stets eine eindeutige Lösung?