Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Stefan Volkwein
Martin Gubisch, Sabrina Rogg
Wintersemester 2015/2016

Ausgabe: Freitag, 27.11.2015
Abgabe: Freitag, 04.12.2015, 10:00 Uhr, Büro G413

POD für linear-quadratische Optimalsteuerung
3. Übungsblatt

☐ **Aufgabe 8** (POD-Optimalität bzgl. der Frobenius-Norm) (5 Punkte)

Seien $Y \in \mathbb{R}^{m\times n}$ eine Rang-d Matrix, $\ell \leq d$, $\Psi = (\psi_1, ..., \psi_\ell)$ eine POD-Basis zu Y bzgl. des Standard-Skalarprodukts des $\mathbb{R}^m$ und $\Phi = (\phi_1, ..., \phi_\ell)$ ein $\mathbb{R}^m$-Orthonormalsystem. Zeigen Sie:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left(Y_{ij} - \sum_{l=1}^{\ell}\langle Y_j, \Psi_l\rangle \Psi_{il}\right)^2 \leq \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left(Y_{ij} - \sum_{l=1}^{\ell}\langle Y_j, \Phi_l\rangle \Phi_{il}\right)^2$$

bzw. in kompakter Form $\|Y - \Psi(\Psi^{\mathrm{T}}Y)\|_{\mathrm{F}} \leq \|Y - \Phi(\Phi^{\mathrm{T}}Y)\|_{\mathrm{F}}$.

☐ **Aufgabe 9** (Berechnung von Singulärwertzerlegungen) (5 Punkte)

1. Habe $Y \in \mathbb{R}^{n\times n}$ vollen Rang und sei $U\Sigma V^{\mathrm{T}}$ eine Singulärwertzerlegung von Y mit $U, \Sigma, V \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

   Geben Sie eine Singulärwertzerlegung von Y^{-1} an.

2. Bererchnen Sie eine Singulärwertzerlegung der Matrix

$$Y = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

☐ **Aufgabe 10** (POD-Problem als Optimierungsaufgabe mit Nebenbedingung) (5 Punkte)

Betrachten Sie das Minimierungsproblem

$$\min_{\phi_1,\dots,\phi_\ell \in \mathbb{R}^m} \sum_{j=1}^{n}\left\| Y_j - \sum_{l=1}^{\ell}\langle Y_j, \phi_l\rangle \phi_l\right\|^2 \mathrm{d}t \qquad \text{sodass} \qquad \langle \phi_i, \phi_j\rangle = \delta_{ij}.$$

1. Bringen Sie das Problem in die Standardform

$$\min_{x\in\mathbb{R}^N} f(x) \qquad \text{s.t.} \qquad e(x) = 0$$

   für geeignete Funktionen $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ und $e : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$ mit $N = \ell m$ und $M = \frac{1}{2}\ell(\ell+1)$.

2. Sei $x^* \in \mathbb{R}^N$ ein lokales Minimum von f unter der Nebenbedingung $e(x^*) = 0$.

   Zeigen Sie, dass x^* ein regulärer Punkt von e ist.

☐ **Aufgabe 11** (Lagrange-Kalkül für das POD-Problem) (5 Punkte)

1. Stellen Sie für das POD-Problem eine geeignete Lagrange-Funktion $\mathscr{L} : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M \to \mathbb{R}$ auf.

2. Zeigen Sie mit Hilfe des Lagrange-Verfahrens, dass die Lösung des POD-Problems aus den ersten ℓ Singulärvektoren von Y besteht.

Hinweis: Nach (10) existiert genau ein Lagrangemultiplikator $\lambda^* \in \mathbb{R}^M$ mit $\nabla J(x^*) + \langle \lambda^*, \nabla e(x^*)\rangle = 0$.