Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Stefan Volkwein
Martin Gubisch, Sabrina Rogg
Wintersemester 2015/2016

Ausgabe: Montag, 14.12.2015
Abgabe: Donnerstag, 07.01.2016, 10:00 Uhr, Büro G413

POD für linear-quadratische Optimalsteuerung
4. Übungsblatt

☐ **Aufgabe 12** (Diskretisierungen des $\mathcal{L}^2$-Skalarprodukts) (5 Punkte)

1. Seien $\Omega = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$ und $u \in \mathcal{C}^0(\Omega)$. Approximieren Sie das Integral
$$\int_a^b u(x)\,\mathrm{d}x$$
mit Hilfe der Trapezregel.

2. Bestimmen Sie die symmetrische und positiv definite Matrix der Trapezregelgewichtung $W \subseteq \mathbb{R}^{N\times N}$, so dass für $u, v \in \mathcal{L}^2(\Omega)$ gilt
$$\langle u, v\rangle_{\mathcal{L}^2} \approx \langle \mathrm{u}, \mathrm{v}\rangle_W = \mathrm{u}^{\mathrm{T}} W \mathrm{v},$$
wobei $\mathrm{u}, \mathrm{v} \in \mathbb{R}^N$ durch Auswertung der u, v auf einem äquidistanten Gitter von Ω entstehen. Macht diese Definition für alle $u, v \in \mathcal{L}^2(\Omega)$ Sinn?

3. Wiederholen Sie 1. und 2. für den Fall $\Omega = [a_x, b_x] \times [a_y, b_y] \subseteq \mathbb{R}^2$.

4. Wie sieht W in der Situation der ersten Programmieraufgabe aus?

5. Die Finite Elemente-Diskretisierung der Differenzialgleichung aus der ersten Programmieraufgabe hat die Form
$$\Phi\dot{\mathrm{z}} + \Psi\mathrm{z} = 0, \qquad \Phi\mathrm{z}(0) = \mathrm{z}_0,$$
wobei $\Phi = (\langle\phi_i, \phi_j\rangle_{\mathcal{L}^2}) \in \mathbb{R}^{N\times N}$ und $\Psi = (\langle\nabla\phi_i, \sigma\nabla\phi_j\rangle_{\mathcal{L}^2}) \in \mathbb{R}^{N\times N}$ die Masse- und Steifigkeitsmatrix zur Finite Elemente-Basis $(\phi_1, ..., \phi_N)$ bezeichnen. Wie wird in dieser Situation die Matrix W gewählt?

6. Wie sieht W in 5. für das gewichtete $\mathcal{H}^1(\Omega)$-Skalarprodukt
$$\langle\phi, \psi\rangle_{\mathcal{H}^1(\Omega)} = \langle\phi, \psi\rangle_{\mathcal{L}^2(\Omega)} + \langle\nabla\phi, \sigma\nabla\psi\rangle_{\mathcal{L}^2(\Omega)}$$
aus?