



Ausgabe: Freitag, 14.12.2015

Abgabe: Freitag, 07.01.2016, 10:00 Uhr, Büro G413 bzw. per Email

POD für linear-quadratische Optimalsteuerung

4. Übungsblatt – Programmierter Teil

Ziel ist das Lösen der Wärmeleitungsgleichung mit Dirichlet-Nullrandbedingung mittels Reduced Order Modelling.

1. Funktion `AssemPod` zur Berechnung einer POD-Basis:

a) Funktionsaufruf: `data = AssemPod(data)`.

b) Eingabe- und Ausgabeparameter:

```

data.input.x ..... (Nx+2)x1 discretization of [ax,bx]
data.input.y ..... (Ny+2)x1 discretization of [ay,by]
data.input.t ..... Ntx1 discretization of [0,T]
data.input.Snap ..... (NxNy)xNt snapshots
data.input.rank ..... 1x1 length of pod basis

data.output.SingVal ..... 1x1 singular values
data.output.Basis ..... (NxNy)x1 pod basis
  
```

c) Die Funktion soll die Trapez-Gewichtsmatrizen $\text{TimeWeights} \in \mathbb{R}^{N_t \times N_t}$, $\text{SpaceWeights} \in \mathbb{R}^{N_x N_y \times N_x N_y}$ bestimmen (vgl. Aufg. 12) und dann aus den Snapshots mittels Eigenwertzerlegung eine Rang- ℓ POD-Basis berechnen.

d) Beachten Sie: `sqrt(A)` berechnet die Wurzeln der Einträge von A . Zur Berechnung von \sqrt{A} steht der Befehl `sqrtm(A)` zur Verfügung, der allerdings nur nicht zu große Matrizen vom Format `full` verarbeiten kann. Bekannterweise liefern die beiden Verfahren bei Diagonalmatrizen das gleiche Ergebnis – warum ist das so? Wie bestimmen Sie die Wurzel einer Nicht-Diagonalmatrix A ohne die MATLAB-Funktion `sqrtm`?

2. Script `program02`:

a) Deklaration der Daten: $\Omega = [0, 1]^2$, $N_x = N_y = N_t = 200$, $\Theta = (0, 1)$, $\sigma = 0.05$ und

$$f(t; x, y) = tx - y^2, \quad z_0(x, y) = \chi_{[0.25, 0.75]^2}(x, y)$$

b) Berechnen Sie mittels `SolverPde` eine Lösung $z \in \mathbb{R}^{N_x N_y \times N_t}$ von

$$\begin{aligned} \dot{z}(t; x, y) - \sigma \Delta z(t; x, y) &= f(t; x, y) && \text{in } \Theta \times \Omega, \\ z(t; x, y) &= 0 && \text{in } \Theta \times \partial\Omega, \\ z(0; x, y) &= z_0(x, y) && \text{in } \Omega. \end{aligned}$$

Verwenden Sie dabei Rannacher-Smoothing (RS).

c) Bestimmen Sie mittels `AssemPod` eine POD-Basis $\psi = (\psi_1, \dots, \psi_\ell) \in \mathbb{R}^{N_x N_y \times \ell}$ vom Rang ℓ für $\ell = 1, \dots, 25$, $\psi_i \in \mathbb{R}^{N_x N_y \times 1}$.

d) Berechnen Sie die Daten des reduzierten Modells $\Psi^\ell, \Phi^\ell \in \mathbb{R}^{\ell \times \ell}$, $z_0^\ell \in \mathbb{R}^{\ell \times 1}$ und $f \in \mathbb{R}^{\ell \times N_t}$.

e) Lösen Sie das reduzierte Anfangswertproblem. Setzen Sie `assem` auf `FALSE`, sonst überschreiben Sie Φ^ℓ, Ψ^ℓ .

f) Transformieren Sie die reduzierte Lösung zurück in ein $z_{\text{ROM}}^\ell \in \mathbb{R}^{N_x N_y \times N_t}$.

g) Bestimmen Sie die Approximationsfehler $\text{AbsErr}(\ell)$ und $\text{IntErr}(\ell)$,

$$\begin{aligned} \text{AbsErr}(\ell) &= \max_{(x,y) \in \Omega} \max_{t \in \Theta} |z_{\text{ROM}}^\ell(t; x, y) - z(t; x, y)|, \\ \text{IntErr}(\ell) &= \left(\int_{\Omega} \int_{\Theta} |z_{\text{ROM}}^\ell(t; x, y) - z(t; x, y)|^2 dt d(x, y) \right)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

wobei die Integrale wie üblich mittels Trapezregel berechnet werden.

h) Stellen Sie die beiden Approximationsfehler und die berechneten Eigenwerte $\sigma_1, \dots, \sigma_\ell$ in jeweils einem Schaubild dar (logarithmische Skalen `semilogy` könnten nützlich sein). Kommentieren Sie die Zusammenhänge und Unterschiede.