Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Stefan Volkwein
Martin Gubisch, Sabrina Rogg
Wintersemester 2015/2016

Ausgabe: Montag, 18.01.2016
Abgabe: Freitag, 22.01.2016, 10:00 Uhr, Büro G413

POD für linear-quadratische Optimalsteuerung
5. Übungsblatt

☐ **Aufgabe 13** (Linear-quadratisches Optimalsteuerungsproblem) (5 Punkte)

Betrachten Sie die linear-quadratische Optimierungsaufgabe

$$\min J(y,u) = \frac{\sigma_Q}{2} \int_0^T \|y(t) - y_Q(t)\|_H^2 \,\mathrm{d}t + \frac{\sigma_\Omega}{2} \|y(T) - y_\Omega\|_H^2 + \frac{\sigma_u}{2} \int_0^T \|u(t)\|_{\mathbb{R}^m}^2 \,\mathrm{d}t$$

unter den Nebenbedingungen

$$\dot{y}(t) - \Delta y(t) = f(t) + \mathcal{B}u(t) \;\&\; y(0) = y_\circ, \qquad u_a \le u(t) \le u_b,$$

wobei $\sigma_Q, \sigma_\Omega, \sigma_u \in \mathbb{R}$ positive Parameter sind, $y_Q \in L^2(0,T;H)$ und $y_\Omega \in H$ anzusteuernde Zustände, H der Raum $L^2(\Omega)$ für ein reguläres Gebiet Ω, $u_a, u_b \in \mathbb{R}^m$ mit $u_a < u_b$ komponentenweise, $y_\circ \in H$, $f \in L^2(0,T;V')$ und die Zustandslösung y im Raum $W(0,T) = L^2(0,T;V) \cap H^1(0,T;V')$ liegen soll mit $V = H_0^1(\Omega)$. Der Kontrolloperator ist definiert als lineare, beschränkte Abbildung $\mathcal{B} : L^2(0,T;\mathbb{R}^m) \to L^2(0,T;V')$.

1. Bestimmen Sie eine parameterabhängige Konstante $C > 0$, so dass für den zum homogenen Anfangswertproblem

   $$\dot{y}(t) - \Delta y(t) = \mathcal{B}u(t) \;\&\; y(0) = 0$$

   gehörigen Lösungsoperator $\mathcal{S} : u \mapsto y$ gilt

   $$\|\mathcal{S}\|_{\mathcal{L}_\mathrm{b}(L^2(0,T;\mathbb{R}^m), W(0,T))} \le C \qquad \text{bzw.} \qquad \forall u \in [u_a, u_b] : \|\mathcal{S}u\|_{W(0,T)} \le C \|u\|_{L^2(0,T;\mathbb{R}^m)}.$$

2. Zeigen Sie, dass die Fixpunktabbildung $\mathcal{F} : L^2(0,T;\mathbb{R}^m) \to L^2(0,T;\mathbb{R}^m)$,

   $$\mathcal{F}(u) = \min(\max(\sigma_u^{-1}\mathcal{B}^\star p(u), u_a), u_b)$$

   für geeignete Parameter der Optimalsteuerungsaufgabe eine Kontraktion definiert, wobei der adjungierte Zustand p die Lösung des Endwertproblems

   $$-\dot{p}(t) - \Delta p(t) = \sigma_Q(y_Q(t) - y(t)), \qquad p(T) = \sigma_\Omega(y_\Omega - y(T))$$

   bezeichnet.

3. Formulieren Sie einen Pseudocode, der die Optimierungsaufgabe iterativ löst.
