

Ein mathematischer Kontext besteht aus:

einer **Objektquelle** (stellt Objekte zur Verfügung)

einer **Satzquelle** (stellt Sätze zur Verfügung)



Spielsteine



einer **Objektliste** (vorliegende Objekte mit eindeutigen Namen)

einer **Eigenschaftsliste** (vorliegende Eigenschaften der Objekte)



Ereigniskarten



Obj	Element, Menge, Eigenschaft
Saq	---
Obj	$A, B$ : Menge
Eig	---

Was bedeutet der Satz in diesem Kontext?

Obj	$x$ : Element
Vor	$x \in A$
Flg	$x \in B$

Ist ein Element in  $A$ ,

dann ist es auch in  $B$ .

---

Obj	Element, Menge, Eigenschaft
Saq	---
Obj	$A, B$ : Menge
Eig	---

Was bedeutet der Satz in diesem Kontext?

Obj	$x$ : Element
Vor	$x \in A$
Flg	$x \in B$

$A$  ist **Teilmenge** von  $B$ .

---

Obj	Element, Menge, Eigenschaft
Saq	---
Obj	$A$ : Menge
Eig	---

Was bedeutet der Satz in diesem Kontext?

Obj	$B$ : Menge; $x$ : Element
Vor	$x \in A$
Flg	$x \in B$

Ist  $B$  irgendeine Menge  
und  $x$  ein Element in  $A$   
dann ist  $x$  in  $B$ .

---

Obj	Element, Menge, Eigenschaft
Saq	---
Obj	$A$ : Menge
Eig	---

Was bedeutet der Satz in diesem Kontext?

Obj	$B$ : Menge; $x$ : Element
Vor	$x \in A$
Flg	$x \in B$

$A$  ist Teilmenge jeder Menge.

---

Obj	Element, Menge, Eigenschaft
Saq	---
Obj	---
Eig	---

Was bedeutet der Satz in diesem Kontext?

Obj	$A, B : \text{Menge}; x : \text{Element}$
Vor	$x \in A$
Flg	$x \in B$

Sind  $A, B$  Mengen  
und  $x$  ein Element in  $A$   
dann ist  $x$  in  $B$ .

---

Obj	Element, Menge, Eigenschaft
Saq	---
Obj	---
Eig	---

Was bedeutet der Satz in diesem Kontext?

Obj	$A, B : \text{Menge}; x : \text{Element}$
Vor	$x \in A$
Flg	$x \in B$

Jede Menge

ist Teilmenge jeder Menge.



**Kontexte** lassen sich **verändern**:

Objektquelle: durch **Definitionen**

Satzquelle: durch **Beweise**

Objekte: durch **Annahmen**

Eigenschaften: durch **Satzanwendungen**

Veränderungen werden durch **Befehle** gesteuert

---



Vaterkontext

Que	Q
Obj	O
Eig	E

Annahme P mit F



Tochterkontext

Que	Q
Obj	O erw. um P
Eig	E erw. um F

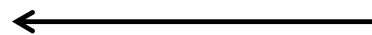
S:

Obj	P
Vor	F
Flg	G



Que	Q*
Obj	O*
Eig	E* mit G

Folgerung G



Que	Q erw. um S
Obj	O
Eig	E

Anwendung von Satz **S** :

Obj	$A, B : \text{Menge}; x : \text{Element}$
Vor	$x \in A \wedge x \in B$
Flg	$x \in A \cap B$

im Kontext

Que	enthält <b>S</b>
Obj	$U, V, W : \text{Menge}; y, z : \text{Element}$
Eig	$y \in U \wedge z \in V \wedge y \in V \cap W$

**Schritt 1:** Zuordnung von Objekten mit passendem Typ

Obj	$A, B : \text{Menge}; x : \text{Element}$
Vor	$x \in A \wedge x \in B$
Flg	$x \in A \cap B$

 $A \mapsto U$ 

Que	enthält S
Obj	$U, V, W : \text{Menge}; y, z : \text{Element}$
Eig	$y \in U \wedge z \in V \wedge y \in V \cap W$

**Schritt 1:** Zuordnung von Objekten mit passendem Typ

Obj	$A, B : \text{Menge}; x : \text{Element}$
Vor	$x \in A \wedge x \in B$
Flg	$x \in A \cap B$

$$A \mapsto U$$
$$B \mapsto V \cap W$$

Que	enthält S
Obj	$U, V, W : \text{Menge}; y, z : \text{Element}$
Eig	$y \in U \wedge z \in V \wedge y \in V \cap W$

**Schritt 1:** Zuordnung von Objekten mit passendem Typ

Obj	$A, B : \text{Menge}; x : \text{Element}$
Vor	$x \in A \wedge x \in B$
Flg	$x \in A \cap B$

Que	enthält S
Obj	$U, V, W : \text{Menge}; y, z : \text{Element}$
Eig	$y \in U \wedge z \in V \wedge y \in V \cap W$

$$\begin{aligned} A &\mapsto U \\ B &\mapsto V \cap W \\ x &\mapsto y \end{aligned}$$

**Schritt 1:** Zuordnung von Objekten mit passendem Typ

Obj	$A, B : \text{Menge}; x : \text{Element}$
Vor	$x \in A \wedge x \in B$
Flg	$x \in A \cap B$

$$(A, B, x) \mapsto (U, V \cap W, y)$$

Que	enthält S
Obj	$U, V, W : \text{Menge}; y, z : \text{Element}$
Eig	$y \in U \wedge z \in V \wedge y \in V \cap W$

---

**Schritt 2:** Transformation der Voraussetzungen

Obj	$A, B : \text{Menge}; x : \text{Element}$
Vor	$x \in A \wedge x \in B$
Flg	$x \in A \cap B$

$$(A, B, x) \mapsto (U, V \cap W, y)$$

$$y \in U \wedge y \in V \cap W$$

**Schritt 3:** Transformation der Folgerung

Obj	$A, B : \text{Menge}; x : \text{Element}$
Vor	$x \in A \wedge x \in B$
Flg	$x \in A \cap B$

$$(A, B, x) \mapsto (U, V \cap W, y)$$

$$y \in U \wedge y \in V \cap W$$

$$y \in U \cap (V \cap W)$$



**Schritt 4:** Übernahme in den Kontext

$$y \in U \wedge y \in V \cap W$$

$$y \in U \cap (V \cap W)$$

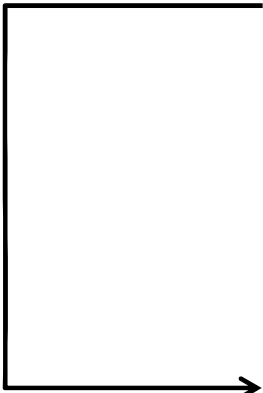
Que	enthält S
Obj	$U, V, W$ : Menge; $y, z$ : Element
Eig	$y \in U \wedge z \in V \wedge y \in V \cap W$

da die Voraussetzungen vorliegen ....

**Schritt 4:** Übernahme in den Kontext

$$y \in U \wedge y \in V \cap W$$

$$y \in U \cap (V \cap W)$$



Que	enthält S
Obj	$U, V, W$ : Menge; $y, z$ : Element
Eig	$y \in U \wedge z \in V \wedge y \in V \cap W \wedge y \in U \cap (V \cap W)$

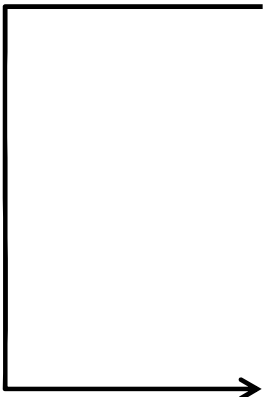
wird die Folgerung in den Kontext übernommen ....

---

## Schritt 4: Übernahme in den Kontext

$$y \in U \wedge y \in V \cap W$$

$$y \in U \cap (V \cap W)$$



Que	enthält S
Obj	$U, V, W$ : Menge; $y, z$ : Element
Eig	$y \in U \wedge z \in V \wedge y \in V \cap W \wedge y \in U \cap (V \cap W)$

Befehlsformat: **Anwendung** S mit  $(U, V \cap W, y)$

---

Wieviele zulässige Anwendungen des Satzes gibt es?

$(U, V \cap W, y)$

$(V \cap W, U, y)$

$(U, U, y)$

$(V \cap W, V \cap W, y)$

$(V, V, z)$

Obj	$A, B : \text{Menge}; x : \text{Element}$
Vor	$x \in A \wedge x \in B$
Flg	$x \in A \cap B$

Que	enthält S
Obj	$U, V, W : \text{Menge}; y, z : \text{Element}$
Eig	$y \in U \wedge z \in V \wedge y \in V \cap W$

---

Befehle

Zwischenstand

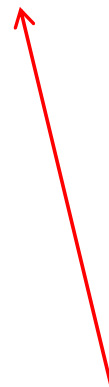
---

**Annahme**

**mit**

Eigenschaft

Objekte aus Objektquelle



Befehle


Zwischenstand

---

**Annahme**  mit

**Folgerung**

Eigenschaft



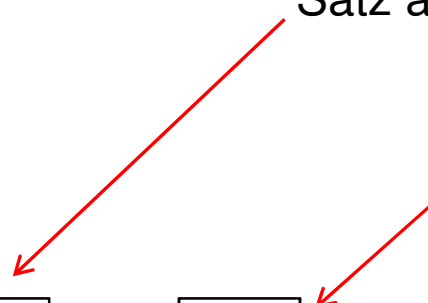
**Annahme**  mit

**Folgerung**

Satz aus Satzquelle

Liste von Objekten

**Anwendung**  mit



Befehle

Zwischenstand

---

**Annahme**  **mit**

**Folgerung**

**Anwendung**  **mit**

damit lassen sich erste Sätze beweisen ...

---



Beweisen Sie:

Obj	$x$ : Element
Vor	$x \in U$
Flg	$x \in U$

im Kontext:

Obj	Element, Menge
Saq	---
Obj	$U$ : Menge
Eig	---

mit den Befehlen: **Annahme**  **mit** **Folgerung**

Beweisen Sie:

Obj	$U : \text{Menge}$
Vor	
Flg	$U \subset U$

im Kontext:

Obj	Element, Menge
Saq	T1 ←
Obj	---
Eig	---

Obj	$A, B : \text{Menge}$	
Vor	Obj	$x : \text{Element}$
	Vor	$x \in A$
	Flg	$x \in B$
Flg	$A \subset B$	

Beweisen Sie:

Obj	$U, V, W : \text{Menge}$
Vor	$U \subset V \wedge V \subset W$
Flg	$U \subset W$

im Kontext:

Obq	Element, Menge
Saq	T1, T2
Obj	---
Eig	---

Obj	$A, B : \text{Menge}$						
Vor	$A \subset B$						
Flg	<table border="1"> <tr> <td>Obj</td> <td><math>x : \text{Element}</math></td> </tr> <tr> <td>Vor</td> <td><math>x \in A</math></td> </tr> <tr> <td>Flg</td> <td><math>x \in B</math></td> </tr> </table>	Obj	$x : \text{Element}$	Vor	$x \in A$	Flg	$x \in B$
Obj	$x : \text{Element}$						
Vor	$x \in A$						
Flg	$x \in B$						

Beweisen Sie:


Obj	$U : \text{Menge}$
Vor	
Flg	$U \subset U \cap U$

Obj	Element, Menge
Saq	T1, S1 ←
Obj	---
Eig	---

Obj	$A, B : \text{Menge}; x : \text{Element}$
Vor	$x \in A \wedge x \in B$
Flg	$x \in A \cap B$

Beweisen Sie:

Obj	$U : \text{Menge}$
Vor	
Flg	$U \cap U \subset U$

Obj	Element, Menge
Saq	T1, S1, S2 
Obj	---
Eig	---

Obj	$A, B : \text{Menge}; x : \text{Element}$
Vor	$x \in A \cap B$
Flg	$x \in A \wedge x \in B$

---

Beweisen Sie:

Obj	$U, V$ : Menge
Vor	
Flg	$U \cap V \subset V \cap U$

Obj	Element, Menge
Saq	T1, S1, S2
Obj	---
Eig	---

---

Beweisen Sie:

Obj	$U, V : \text{Menge}$
Vor	
Flg	$V \cap U \subset U \cap V$

Obj	Element, Menge
Saq	T1, S1, S2, B5 ←
Obj	---
Eig	---

Obj	$U, V : \text{Menge}$
Vor	
Flg	$U \cap V \subset V \cap U$