Universität Konstanz
FB Mathematik & Statistik
Prof. Dr. M. Junk
Dr. Vita Rutka

Ausgabe: 4. Mai., SS 05
Übung: 12.05

Moderne Methoden der numerischen linearen Algebra

`http://www.math.uni-konstanz.de/~rutka/UEBUNGEN/LinAlg/NumLinAlg.html`

Aufgabenblatt 4: "Experimentelle Numerik"

Aufgabe 1: Dünn contra voll besetzte Matrizen

Auf der Übungs-Webseite können Sie das Programm `SparseMatrixExample.m` herunterladen, das für beliebige n eine dünn besetzte Matrix $A \in \mathbb{R}^{d\times d}$ mit $d = n^2$ generiert. Sei B die "volle" Version, in welcher auch die Nullen abgespeichert werden. In Matlab kann B mit dem Kommando `B=full(A)` generiert werden. Lassen Sie n von 10 bis N laufen (wobei N von der Kapazität Ihres Computers abhängig ist) und führen Sie die folgenden numerischen "Experimente" durch:

1. Mit dem Matlab Kommando `whos` können Sie die Variablengrößen in Bytes herausfinden. Plotten Sie den Speicherbedarf für die Matrizen A und B versus d in log-log Achsen.
2. Sei f ein Zufallsvektor in $\mathbb{R}$. Messen Sie die Zeit, die die Operationen `A\f` und `B\f` benötigen (Kommandos `tic` und `toc`). Visualisieren Sie die Laufzeiten versus d in einem log-log Plot.
3. Eine dünn besetzte Matrix ist durch die drei Vektoren I, J, S und die Dimension d eindeutig spezifiziert, wobei $A_{I(k),J(k)} = S(k)$. Die Vektoren können mit dem Matlab Kommando `find` ermittelt werden.
   (a) Schreiben Sie eine *eigene* Funktion zur Matrix-Vektor Multiplikation für dünn besetzte Matrizen. Als Input sind I, J, S, d und der Vektor, welcher mit der Matrix multipliziert werden soll, anzugeben.
   (b) Schreiben Sie eine weitere *eigene* Funktion zur Matrix-Vektor Multiplikation für vollbesetze Matrizen.

   Sei x ein Zufallsvektor in $\mathbb{R}^d$. Nehmen Sie die Zeit auf, die Ihre Funktionen zum Ausrechnen von Ax und Bx benötigen. Visualisieren Sie auch hier das Ergebnis in einem log-log Plot.

Plotten Sie in allen Fällen auch die Kontrollkurven d versus d, d^2 versus d und d^3 versus d. Wenn eine Kurve parallel zur d^k, $k \in \mathbb{R}$ verläuft, dann ist die entsprechende Operation "$\mathcal{O}(d^k)$ teuer" (warum?). **Wie teuer ist jede der oben ausgeführten Operationen?**

Aufgabe 2: Was ist "ein kleiner Fehler"?

Sei x die exakte Lösung des Problems $Ax = b$ mit $A \in \mathbb{R}^{d\times d}$ und $b \in \mathbb{R}^d$. Meistens, liefern uns numerische Methoden nicht die genaue Lösung x, sondern eine Approximation y. Da x nicht bekannt ist, können wir den *Fehler* $\varepsilon := x - y$ nicht ausrechnen. Stattdesen, mussen wir uns mit dem *Residuum* $r := Ax - Ay = b - Ay$ begnügen.

Das Abbruchkriterium in meisten iterativen Methoden ist ein "kleines genug" r in der Annahme, daß dann auch der Fehler ε klein sein sollte. Doch was ist "klein genug"?

1. Dazu definiert man zumnächst eine *Norm*. In der Praxis sind die folgenden drei Normen gängig:

$$\|x\|_1 := \sum_{i=1}^{d} |x_i| \quad , \quad \|x\|_2 := \left(\sum_{i=1}^{d} x_i^2 \right)^{1/2} \quad , \quad \|x\|_\infty := \max_{1 \le i \le d} |x_i| \, .$$

   Zeigen Sie, daß die folgende Ungleichungen gelten:

   (a) $\|x\|_2 \le \|x\|_1 \le \sqrt{d}\, \|x\|_2$,
   (b) $\|x\|_\infty \le \|x\|_2 \le \sqrt{d}\, \|x\|_\infty$
   (c) $\frac{1}{d}\|x\|_1 \le \|x\|_\infty \le \|x\|_1$.

   Gemäß dieser Ungleichungen sind die drei Vektornormen *äquivalent*. Somit kann man für festes d diejenige auszuwählen, welche am einfachsten zu berechnen ist. **Doch ist eine solche Vorgehensweise auch für $d \to \infty$ legitim?** (Was in Praxis oft der Fall ist!)

2. Nehmen Sie die Matrix A von Aufgabe 1. Lassen Sie wieder n von 10 bis N laufen (diesmal kann N ruhig etwas großer sein!).

   Für jedes n nehmen Sie einen Zufallsvektor ("Residuum") $r \in \mathbb{R}^d$, dessen Einträge relativ klein sind. Das können Sie, z.B., mit dem Kommando `r=0.01*rand(d,1)` erreichen. Berechnen Sie den entsprechenden "Fehler" ε: $A\varepsilon = r$.

   Visualisieren Sie $\|r\|_1$, $\|r\|_2$, $\|r\|_\infty$, $\|\varepsilon\|_1$, $\|\varepsilon\|_2$, $\|\varepsilon\|_\infty$ versus d. Vergleichen Sie die verschiedenen Kurven. **Was beobachten Sie?**