Universität Konstanz
FB Mathematik & Statistik
Prof. Dr. M. Junk
Dr. Vita Rutka

Ausgabe: 12. Mai., SS 05
Übung: 19.05

# Moderne Methoden der numerischen linearen Algebra

http://www.math.uni-konstanz.de/~rutka/UEBUNGEN/LinAlg/NumLinAlg.html

## Aufgabenblatt 5

### Aufgabe 1:

Wir betrachten ein eindimensionales Randwertproblem

$$\frac{du}{dx} + \lambda \frac{d^2u}{dx^2} = f \text{ in } (a,b) \quad , \quad u(a) = u_A \quad , \quad u(b) = u_B \tag{1}$$

mit einem reellen Parameter $\lambda$. Seien $x_i = a + (i-1)h$, $i = 1, \ldots, n$ die Gitterpunkte, wobei $x_n = b$. Eine der möglichen Diskretisierungen von Gleichung (1) lautet

$$\begin{cases} \frac{1}{h}\Big(u(x_{i+1}) - u(x_i)\Big) + \lambda \frac{1}{h^2}\Big(u(x_{i+1}) - 2u(x_i) + u(x_{i-1})\Big) = f(x_i) \quad \text{für} \quad i = 2, \ldots, n-1 \\ u(x_1) = u_A \ , \ u(x_n) = u_B \end{cases} . \tag{2}$$

Schreiben Sie ein Programm zum Lösen des Systems (2). Zum Testen kann die folgende analytische Lösung für den Fall $f = -1$ benutzt werden:

$$u(x) = -x - \lambda e^{-x/\lambda} C_1 + C_2 \,,$$

wobei die Konstanten $C_1$ und $C_2$ von $u_A$ und $u_B$ abhängig sind.

Setzen Sie den Parameter $\lambda$ gleich $\{\pm 1,\ \pm 0.1,\ \pm 0.01,\ \pm 0.001,\ \pm 0.0001\}$. Vergleichen Sie die analytischen und numerischen Lösungen.

Was beobachten Sie? Experimentieren Sie mit verschiedene Werte von $n$.

### Aufgabe 2: Jacobi Iteration

Eines der einfachsten Iterationsverfahren zum Lösen von linearen Systemen $Av = b$, $A \in \mathbb{R}^{d \times d}$, $b \in \mathbb{R}^d$ ist die sogenannte *Jacobi Iteration.*

Die Matrix $A$ wird durch eine Summe $A = D + B$ dargestellt, wobei $D$ die Hauptdiagonale von $A$ ist. Durch Umschreiben $Av = Dv + Bv = b$ wird dann die Iteration definiert:

$$v^{(n+1)} = D^{-1}\left(b - Bv^{(n)}\right) =: D^{-1}b - Tv^{(n)} \,.$$

Es wird erwartet, daß $v^{(i)}$ gegen die exakte Lösung $v^*$ konvergiert wenn $i \to \infty$.

Verwenden Sie die Jacobi Iteration zum Lösen von System (2). Setzen Sie $f = -1$, $\lambda$ gleich $\{\pm 1,\ \pm 0.1,\ \pm 0.01\}$, und $u_A = u_B = 0$.

1. Lösen Sie das System (2) "exakt", d.h., mit Matlab '\'-Operator. Visualisieren Sie für die ersten 500 Iterationen die "exakte" Lösung, Zwischenapproximationen $v^{(i)}$, wobei $i = 1, 2, \ldots, 500$ die Iterationsnummer ist und den Residuum $r^{(i)} := b - Av^{(i)}$.

   Was beobachten Sie? Ist immer Konvergenz zu erwarten? Was passiert wenn $n$ vergrößert wird?

2. Wir setzen $\|Av^{(i)} - b\|_2 / \|b\|_2 \leq \mathit{toler}$ mit einer vorgeschriebenen Toleranz *toler* als Abbruchkriterium. Füllen Sie für jedes $\lambda \in \{\pm 1,\ \pm 0.1,\ \pm 0.01\}$ die folgende Tabelle aus:

| $\lambda$ : | | | |
|---|---|---|---|
| $n$ | Iterationen | $\rho(T)$ | $\|T\|_2$ |
| 31 | | | |
| 61 | | | |
| 121 | | | |

   Hier steht $\rho(T)$ für den Spektralradius der Matrix $T$.
   **ACHTUNG: lange Laufzeiten sind zu erwarten!**

3. Analysieren Sie Ihre Ergebnisse!

   (a) Plotten Sie das Residuum versus die Iterationsnummer.

   (b) Ist Ihr Verdacht auf Nicht-Konvergenz in Teil 1 immer bestätigt worden?

   (c) Welcher Bedingung an das Spektrum von $T$ und $T^\top T$ ist für die Konvergenz *hinreichend* und welche ist *notwendig*?

   (d) Welchen Einfluß hat die *Diagonaldominanz* von $A$ auf die Konvergenzeigenschaften?

   (e) Weitere Beobachtungen, Bemerkungen,...?