Universität Konstanz
FB Mathematik & Statistik
Prof. Dr. M. Junk
Dr. Vita Rutka

Ausgabe: 27. Mai., SS 05
Übung: 02.06.2005

Moderne Methoden der numerischen linearen Algebra

http://www.math.uni-konstanz.de/~rutka/UEBUNGEN/LinAlg/NumLinAlg.html

Aufgabenblatt 7: Splitting Verfahren

Aufgabe 1: Welche Methode ist besser?

Gegeben sind vier lineare Gleichungssysteme

$$A_i x = f_i \quad , \quad i \in \{1, 2, 3, 4\} ,$$

wobei

$$A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 7 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad , \quad f_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} \quad , \quad A_2 = \begin{pmatrix} -3 & 3 & -6 \\ -4 & 7 & -8 \\ 5 & 7 & -9 \end{pmatrix} \quad , \quad f_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} ,$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 2 & -9 & 0 \\ 0 & -8 & -6 \end{pmatrix} \quad , \quad f_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad A_4 = \begin{pmatrix} 7 & 6 & 9 \\ 4 & 5 & -4 \\ -7 & -3 & 8 \end{pmatrix} \quad , \quad f_4 = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ -7 \end{pmatrix} .$$

Lösen Sie diese mit dem Jacobi und Gauss-Seidel Verfahren. Dokumentieren Sie die Anzahl der Iterationen, die Sie brauchen, um eine bestimmte Toleranz des Residuums zu erreichen.

Bestimmen Sie den Spektralradius der Iterationsmatrizen (Matrix M in der Vorlesung) und erklären Sie Ihre Ergebnisse!

Aufgabe 2: Vorkonditionierung

Wir betrachten die Matrix aus der Aufgabe 1, Blatt 3 (Diskrete Poisson Gleichung) mit einem zufälligen Vektor auf der rechten Seite. Versuchen Sie, das Gleichungssystem mit der Richardson Iteration zu lösen. Als Abbruchkriterium ist wieder die $\|.\|_2$-Norm des relativen Residuums zu benutzen. Visualisieren Sie das Spektrum der Iterationsmatrix für ein kleines N (z.B., $N = 20$, siehe die Aufgabe 1, Blatt 3).

Benutzen Sie eine unvollständige LU-Zerlegung (Matlab Befehl `luinc`) als Vorkonditionierer um die Konvergenzeigenschaften zu verbessern. Probieren Sie die folgenden Zerlegungen aus: `luinc(A,'0')`, `luinc(A,1)`, `luinc(A,0.1)`, `luinc(A,0.01)` und `luinc(A,0)`. Für eine genaue Beschreibung dieser Befehle siehe Matlab Hilfe.

1. Lassen Sie den Gitterparameter N von 10 bis etwa 80 laufen und visualisieren Sie die Iterationszahl versus N. Welcher Vorkonditionierer führt zu den besten Iterationszahlen?

2. Visualisieren Sie Für $N = 20$ das Spektrum der Iterationsmatrizen und erklären Sie Ihre Ergebnisse.

3. Dokumentieren Sie die Zeit zum Ausrechnen jedes Vorkonditionierers.