Universität Konstanz
FB Mathematik & Statistik
Prof. Dr. M. Junk
Dr. Vita Rutka

Ausgabe: 02. Juni, SS 05
Übung: 09.06.2005

Moderne Methoden der numerischen linearen Algebra

http://www.math.uni-konstanz.de/~rutka/UEBUNGEN/LinAlg/NumLinAlg.html

Aufgabenblatt 8: Gradientverfahren

Aufgabe 1: Illustrieren des Vorlesungsskriptes

Wir betrachten drei Gleichungssysteme der Form $A_i x = b$, $i = 1, 2, 3$, wobei

$$A_1 = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 20 \end{pmatrix} \quad , \quad A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \quad , \quad A_3 = \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 1 & -20 \end{pmatrix} \quad .$$

Visualisieren Sie die entsprechende Funktion (siehe Vorlesung)

$$\Phi(y) = \frac{1}{2} y^\top A y - y^\top b$$

mit $b = (0,0)^\top$ in eine Umgebung der exakten Lösung $x = (0,0)^\top$.
Implementieren Sie die Richardson Iteration und das Gradientverfahren in zwei Dimensionen. Berechnen Sie die ersten zehn Iterationen.

1. Visualisieren Sie die Zwischenlösungen x^k, $k = 1, 2, \dots, 10$ in der (x_1, x_2)-Ebene. Plotten Sie für jedem x^k die entsprechende Niveau-Linie des Funktionals Φ, d.h., die Kurve $\{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 \mid \Phi(y) = \Phi(x^k)\}$.
2. Visualisieren Sie die Zwischenlösungen x^k, $k = 1, 2, \dots, 10$ mittels einer 3D Graphik, indem Sie die Punkte $(x_1^k, x_2^k, \Phi(x^k))$ markieren. Verbinden Sie die Punkte $(x_1^k, x_2^k, \Phi(x^k))$ und $(x_1^{k+1}, x_2^{k+1}, \Phi(x^{k+1}))$ mit einer auf der von $\Phi(y)$ beschriebenen Fläche liegenden Kurve, deren Projektion auf die (x_1, x_2)-Ebene ein gerades Segment zwichen x^k und x^{k+1} ist.

Bereiten Sie die folgende Illustrationen vor:

1. Matrix A_1, Methoden: Gradientverfahren, Richardson mit $\omega = \{0.1, 0.075, 0.05\}$, $x^0 = (1,1)$.
2. Matrix A_2, Methode: Gradientverfahren, $x^0 = \{(1,1), (1,1.1), (1,0.9)\}$. Was passiert mit den Richardson Iterationen?
3. Matrix A_3, Methode: Gradientverfahren, $x^0 = (1,1)$. Was passiert mit den Richardson Iterationen?

Die Matrix A_3 ist symmetrisch und negativ definit. Aus der Vorlesung wissen wir, daß Gradientenverfahren für symmetrische, **positiv** definite Matrizen stets konvergieren. Zeigen Sie, dass dies auch für **negativ** definite, symmetrische Matrizen der Fall ist!

Aufgabe 2: Lineare Operatoren und Matrizen

In vielen Anwendungen kann das Erstellen der Matrix sehr problematisch sein. Gradientenähnliche Verfahren ermöglichen das Lösen von Gleichungssystemen, ohne dass die Matrix explizit berechnet werden muss, da in jeder Iteration nur der Vektor Ax, wobei A die entsprechende Matrix ist, berechnet werden muss. Dafür braucht man eine Funktion `berechneAx(x)`, die für einen gegebenen Vektor x das Produkt Ax wiedergibt. Damit wird die Matrix mit dem entsprechenden linearen Operator gleichgesetzt.

Verwenden Sie diese Idee, um die Aufgabe 2 von dem Blatt 3 ohne Aufbauen der Matrix zu lösen.

Überprüfen Sie numerisch die Linearitätsaxiome Ihres Operators. Für zwei beliebige Elemente x, y des Definitionsraums und jeden Skalar λ muss gelten

1. `berechneAx(x+y)=berechneAx(x)+berechneAx(y)`,
2. `berechneAx(`λ `x)` $=$ λ `berechneAx(x)` .

Bemerkung: Nicht nur das Aufbauen der Matrix ist überflüssig geworden. Auch die skalare Numerierung der Gitterpunkte ist nicht mehr notwendig, es kann direkt mit zwei-dimensionalen Arrays gearbeitet werden.

Visualisieren Sie die Entwicklung der Lösung und des Residuums im Verlauf der Iterationen.