Universität Konstanz
FB Mathematik & Statistik
Prof. Dr. M. Junk
Dr. Vita Rutka

Ausgabe: 09. Juni, SS 05
Übung: 16.06.2005

Moderne Methoden der numerischen linearen Algebra

http://www.math.uni-konstanz.de/~rutka/UEBUNGEN/LinAlg/NumLinAlg.html

Aufgabenblatt 9: CG-Verfahren

Aufgabe 1: Gitteroptimierung

Das in Aufgabe 1, Blatt 6 (Minimalfäche) generierter Gitter hat sich durch eine schlechte Qualität ausgezeichnet. Sehr schmale Winkel in der Triangulierung führen in praktischen Anwendungen zu Problemen. Mittels einer *Regularisierung* wird eine Triangulierung erzeugt, so daß alle im Innern des Gebietes liegenden Dreiecke eine Form annehmen, die so regulär wie möglich ist (im Grenzfall, sollte jedes Dreieck gleichseitig sein).

Wir führen eine *baryzentrische Regularisierung* durch. Dabei werden die Knoten festgehalten, die auf dem Rand des Gebiets liegen. Für die Koordinaten der inneren Knoten wird die folgende Bedingung verlangt:

$$\begin{matrix}\text{Koordinaten}\\ \text{des Knoten}\end{matrix} = \frac{1}{\text{Anzahl der Nachbarn}} \sum (\text{Koordinaten aller Nachbarn})\,.$$

Die Definition der Nachbarnknoten und die Beschreibung der Triangulierung ist Aufgabe 1, Blatt 6 zu entnehmen. Die Struktur der Triangulierung (Triangulierungsmatrix) wird nicht beeinflusst.

1. Implementieren Sie die oben beschriebene Gitteroptimierung und benutzen Sie zunächst den Matlab "\"-Operator zum lösen den Resultierenden linearen System. Visualisieren Sie das neue Gitter und vergleichen Sie es mit dem alten.
2. Implementieren Sie das CG-Verfahren und lösen sie das System damit. Wie erhält man eine symmetrische Matrix? Was passiert, wenn Sie das CG-Verfahren auf das nichtsymmetrische Problem anwenden?
3. Visualisieren Sie die ersten 50 Iterationen für $n = 20$ (Anzahl der Knoten auf dem Rand). Benutzen Sie die folgende Initialisierungen:
   (a) Koordinaten des alten, nicht-optimierten Gitters
   (b) Nullvektor
   (c) Vektor mit allen Einträgen gleich 1.

Aufgabe 2: Krylov-Raum

Sei

$$Ax = b$$

ein lineares System mit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Der Krylov Raum K_i zu der Vektor y wird definiert durch

$$K_i(y) := \text{Span}\{y,\, Ay,\, A^2y,\, \dots,\, A^{i-1}y\} \quad , \quad k = 1,\, 2,\, \dots,\, n\,.$$

Es kann gezeigt werden, daß die i-te Iterierte x_i des CG-Verfahrens in den Raum

$$S_i := K_i(r_0) + x_0$$

liegt, wobei x_0 der Anfangsvektor ist und $r_0 := b - Ax_0$ das entsprechende Residuum.

1. Illustrieren Sie diesen Fakt in zwei Dimensionen. Nehmen Sie

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad , \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

   Visualisieren Sie die Basisvektoren der Räume S_1 und S_2 und markieren Sie die Punkte x_0, x_1 und x_2. Markieren Sie die exakte Lösung. Wiederholen Sie dasselbe mit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} .$$

   Was beobachten Sie? Was passiert wenn Sie weitere x_i, $i \in \mathbb{N}$ ausrechnen?

2. Illustrieren Sie diese Tatsache in drei Dimensionen. Nehmen Sie

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 12 & 10 \\ 0 & 10 & 11 \end{pmatrix} \quad , \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ -11.01 \\ -9.9 \end{pmatrix} \quad , \quad x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

   Visualisieren Sie die Basisvektoren der Räume S_1, S_2 und S_3. Überprüfen Sie, daß x_i in S_i liegt, $i = 1, 2, 3$ und markieren Sie die exakte Lösung. Wiederholen Sie dasselbe mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 12 & 10 \\ 0 & 9 & 11 \end{pmatrix} .$$

   Was beobachten Sie? Was passiert, wenn Sie weitere x_i, $i \in \mathbb{N}$ ausrechnen?