Universität Konstanz
FB Mathematik & Statistik
Prof. Dr. M. Junk
Dr. Vita Rutka

Ausgabe: 16. Juni, SS 05
Übung: 23.06.2005

Moderne Methoden der numerischen linearen Algebra

http://www.math.uni-konstanz.de/~rutka/UEBUNGEN/LinAlg/NumLinAlg.html

Aufgabenblatt 10: Eigenes Gradientverfahren

Aufgabe

Sei

$$Ax = b \tag{1}$$

ein lineares Gleichungssystem. Das Gradientverfahren zum Lösen von (1) wurde durch das Minimieren von $\|y - A^{-1}b\|_A^2$ definiert (siehe Vorlesung).

Entwicklen Sie in Analogie zur Standardversion eine ähnliche Methode, in dem Sie $\|.\|_{A^\top A}$ benutzen. Das heißt, gesucht wird das Minimum von $\|y - A^{-1}b\|_{A^\top A}^2$.

1. Schreiben Sie die entsprechenden Funktionale $\Psi(y)$ und $\Phi(y)$ auf. (in der Notation aus der Vorlesung.)

2. Die Iteration wird durch

$$x_{k+1} = x_k + \alpha_k(-\nabla\Psi(x_k))$$

   definiert.

   (a) Berechnen Sie $\nabla\Psi(y)$, um die steilste Abstiegsrichtung zu bestimmen.

   (b) Bestimmen Sie den optimalen Schritt α_k.

3. Wiederholen Sie Aufgabe 1, Blatt 8 mit diesem Verfahren. Was beobachten Sie bezüglich des Funktionals Φ und der Konvergenz?

4. Warum ist dieses Verfahren für *beliebige* (nichtsinguläre) Matrizen konvergent?