Universität Konstanz
FB Mathematik & Statistik
Prof. Dr. M. Junk
Dr. Vita Rutka

Ausgabe: 23. Juni, SS 05
Übung: 30.06.2005

Moderne Methoden der numerischen linearen Algebra

http://www.math.uni-konstanz.de/~rutka/UEBUNGEN/LinAlg/NumLinAlg.html

Aufgabenblatt 11: GMRES

Aufgabe 1

Laden Sie den Quelltext des GMRES Algorithmus von der Webseite von Prof. Dr. A. Meister (Uni Kassel) herunter:
http://www.mathematik.uni-kassel.de/~meister/buch_online/Matlab/matlab.htm
(Bitte **NICHT** unter dem Namen `gmres.m` abspeichern, da eine Matlab Funktion mit diesem Namen bereits vorhanden ist!) Lösen Sie damit den System für die x-Komponente der Knotenkoordinaten aus der Aufgabe 1, Blatt 9.

1. Variieren Sie den Gitterparameter n von 10 bis 120 und dokumentieren Sie die Anzahl der Iterationen bzw. Laufzeiten, die Sie zum Erreichen der Toleranz 10^{-6} benötigen. Wiederholen Sie dieselbe Aufgabe mit dem CG-Verfahren für das symmetrisiertes Problem. Vergleichen Sie die Ergebnisse!

2. Wenn viele Iterationen zur Konvergenz notwendig sind, wird GMRES in der Standardversion teuer. An welchen Stellen könnten Probleme auftreten?

   Modifizieren Sie den Quellentext des GMRES Algorithmus so, daß ein *Neustart* nach m Iterationen stattfindet (GMRES(m) Verfahren). Warum und in welchen Situationen ist der Speicherbedarf niedriger?

   Vergleichen Sie die Iterationszahlen und Laufzeiten mit dem Standard-GMRES Algorithmus!

Aufgabe 2: Advektionsgleichung

Eine Welle, welche sich nur in positiver x-Richtung mit der Geschwindigkeit 1 ausbreiten kann, wird durch die *Advektionsgleichung* beschrieben:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad , \quad x \in (0,1) \ , t > 0 \, . \tag{1}$$

Dabei bezeichnet u die Wellenamplitude, x die Raumkoordinate und t die Zeit ist. Zusätzlich sind folgende Anfangs- und Randbedingungen gegeben

$$u(0,x) = 0 \quad , \quad x \in (0,1) \quad , \quad u(t,0) = \sin(4\pi t) \quad , \quad t > 0 \ .$$

Aus physikalischen Gründen darf auf dem Rand $x = 1$ kein Randwert vorgeschrieben werden.
Die exakte Lösung von (1) lautet

$$u(t,x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x > t \, , \\ \sin(4\pi(t-x)) & \text{sonst.} \end{cases} \tag{2}$$

Zum Zweck des numerischen Lösen wird wieder eine Raum- und Zeitdiskretisierung eingeführt. Sei $x_i := (i-1)h$, $i = 1, 2, \ldots, m$ die Gitterpunkte im Intervall $(0,1)$ mit $h = \frac{1}{m-1}$ und $t_n := (n-1)\tau$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, $\tau > 0$ die Zeitpunkte.

Durch eine einfache Approximation

$$\frac{1}{\tau}\left(U_j^{n+1} - U_j^n\right) + \frac{1}{2h}\left(U_{j+1}^{n+1} - U_{j-1}^{n+1}\right) = 0 \tag{3}$$

kann die Gleichung (1) für alle inneren Gitterpunkte x_j, $j = 2, 3, \ldots, m-1$ und für jedes $n \geq 1$ diskretisiert werden, wobei $U_j^n \approx u(t_n, x_j)$.

Auf dem linken Rand wird $U_1^n = \sin(4\pi t_n)$ gesetzt. Der rechte Rand mit $x_m = 1$ ist problematischer, da die Approximation (3) nicht direkt eingesetzt werden kann. Dieser wird durch

$$\frac{1}{\tau}\left(U_m^{n+1} - U_m^n\right) + \frac{1}{2h}\left(U_{ghost}^{n+1} - U_{m-1}^{n+1}\right) = 0$$

ersetzt. Der Wert von $U_{ghost}^{n+1} \approx u(t_{n+1}, 1+h)$ kann mit Hilfe von Splines ausgerechnet werden. Wir benutzen $s \in \{3, 5, 10, 15\}$ Stützstellen, die durch die Paare

$$(x_{m-s+1}, U_{m-s+1}^{n+1}),\ (x_{m-s+2}, U_{m-s+2}^{n+1}),\ \ldots,\ (x_m, U_m^{n+1})$$

gegeben sind. Die Extrapolation kann mit dem Matlab-Kommando `splines` durchgeführt werden.

Die Bewegung der Amplitude kann damit durch folgende Iteration berechnet werden: Sei U^n gegeben. Dann

$$\begin{cases} U_j^{n+1} = \sin(4\pi t_{n+1}) & j = 1 \\ U_j^{n+1} + \frac{\tau}{2h}\left(U_{m+1}^{n+1} - U_{j-1}^{n+1}\right) = U_j^n & j = 2, 3, \ldots, m-1 \\ U_j^{n+1} + \frac{\tau}{2h}\left(U_{ghost}^{n+1} - U_{j-1}^{n+1}\right) = U_j^n & j = m \end{cases} \tag{4}$$

Also, um U^{n+1} auszurechnen, muss das System (4) für die unbekannten U^{n+1} gelöst werden.

Nehmen Sie $\tau = h$ und lösen Sie numerisch die Gleichung (1). Das System (4) ist mit GMRES zu lösen.

Visualisieren Sie den Wellentransport und vergleichen Sie die numerische mit der analytischen Lösung (2).