Universität Konstanz
FB Mathematik & Statistik
Prof. Dr. M. Junk
Dr. Vita Rutka

Ausgabe: 30. Juni, SS 05
Übung: 07.07.2005

Moderne Methoden der numerischen linearen Algebra

`http://www.math.uni-konstanz.de/~rutka/UEBUNGEN/LinAlg/NumLinAlg.html`

Aufgabenblatt 12:

Aufgabe 1: MINRES Verfahren

Besorgen Sie sich eine editierbare MINRES Implementierung zum Lösen von

$$Ax = b \quad , \quad A \in \mathbb{R}^{n\times n} \, , \, b \in \mathbb{R}^n \, , \, A = A^\top \, .$$

(eigene Implementierung/Buch/Internet?). Die Matlab Implementierung können Sie mit Kommandos `more on; type minres; more off` anschauen.

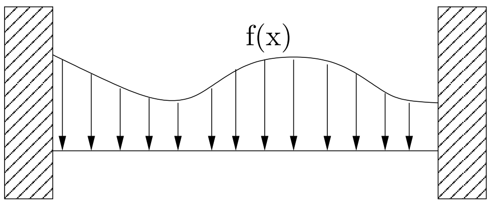
Als Eingabeparameter sind die Matrix A, die Rechte Seite b, die maximale Anzahl der Iterationen $maxit$, sowie die Abbruchtoleranz $toler$ und der Anfangsvektor x_0 anzugeben. Als Abbruchkriterium ist

$$\|b - Ay\|_2 \leq toler \, \|b\|_2$$

zu benutzen.

Aufgabe 2: Balkenbiegung

Wir betrachten einen an seinen Endpunkten eingespannten Balken wie in der Abbildung.



Die Struktur der Länge 1 ist einer verteilten Last f unterworfen.

Die Querbiegung des Balkens wird durch die folgende Differentialgleichung 4. Ordnung

$$Ku'''' = f(x) \, , \quad 0 < x < 1$$

beschrieben, wobei $u = u(x)$ die vertikale Verschiebung bezeichnet und K eine physikalische Konstante ist. Einfachheitshalber nehmen wir $K = 1$ an. Die Randbedingungen $u(0) = u(1) = 0$, $u'(0) = u'(1) = 0$ beschreiben die Auswirkungen der zwei Einspannungen.

Eine Differenzenapproximation der oben beschriebenen Gleichung führt zu dem System

$$\begin{cases} v_{j-2} - 4v_{j-1} + 6v_j - 4v_{j+1} + v_{j+2} = h^4 f_j, & j = 3, 4, \ldots, n-2 \\ v_1 = v_2 = v_{n-1} = v_n = 0 \end{cases} \tag{1}$$

wobei $v_j \approx u(x_j)$, $x_j = (j-1)h$, und $h = \frac{1}{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$.

Lösen Sie das System mittels

1. Matlab "\"-Operator
2. CG-Verfahren

3. GMRES-Verfahren
4. MINRES-Verfahren

Beachten Sie dabei, daß die System-matrix symmetrisch sein muss. Die Kraft f ist gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} -1 & 0.3 \leq x \leq 0.4 \\ 0 & \text{sonst}\,. \end{cases}$$

Dokumentieren Sie Anzahl der Iterationen und die Laufzeiten, die Sie zum Erreichen der Abbruchstoleranz 10^{-6} benötigen. Nehmen Sie n = 21, 41, 61, 81, 121. Welche Methode ist für dieses Problem empfehlenswert?

Visualisieren Sie die ersten 100 Iterationen für n = 21, 41, 61, 81, 121. Wie verhält sich die Lösung? Visualisieren Sie die Norm des relativen Residuums versus die Iterationsnummer in einem log-log Plot. Was beobachten Sie?

Mathematisch ändert sich nichts, wenn sie, z.B., die 5. Gleichung in das System (1) mit -1 multiplizieren. Ist es auch in der Praxis der Fall? Erklären Sie, was passiert!

Bemerkung: Um einen zügigeren Ablauf der Übung zu sichern, wäre es empfehlenswert, wenn Sie Ihre Beobachtungen, Kommentare usw. schriftlich dokumentieren.