



Numerik von Gleichungssystemen 1. Übungsblatt

Aufgabe 1.1: Assemblieren einer Finite-Differenzen Matrix

Die folgende Aufgabe bezieht sich auf das Ergänzungsblatt zur Vorlesung.

- (*Vorüberlegung*) Spezifizieren Sie alle relevanten Typen (Fallunterscheidungen) unter den schwarzen Knoten (siehe Abbildung 2 des Ergänzungsblattes) und charakterisieren Sie jeden Typ durch eine zugehörige Gleichung für $\hat{\phi}$ analog zu Gleichung (4) des Ergänzungsblattes.
- (*Programmierung*) Fassen Sie die Gleichungen in sämtlichen schwarzen Knoten zu einem System zusammen. Schreiben Sie ein MATLAB Programm, welches die Systemmatrix und die rechte Seite für beliebiges a, b, h und σ ausgibt.
MATLAB erlaubt verschiedene Programmieransätze, die Matrix konkret aufzustellen. Falls Sie zwei oder mehr Ideen haben, versuchen Sie diese zu realisieren und vergleichen Sie anschließend die Geschwindigkeit Ihrer Programme bei gleicher Parameterwahl.
- (*Programmierung*) Betrachten Sie die Gitterfunktion $\hat{\phi}$ nicht nur auf den schwarzen Knoten sondern auf allen Knoten inklusive der grünen “Dirichlet-Knoten” sowie der “Geisterknoten” (rote Kringel). Welche trivialen Gleichungen gelten dort? Schreiben Sie ein MATLAB Programm, welches die Matrix und die rechte Seite des erweiterten Systems automatisch aufbaut.
- (*Theorie*) Untersuchen Sie die in b) und c) erzeugten Matrizen hinsichtlich spezieller Eigenschaften wie z.B. Symmetrie und Invertierbarkeit. Versuchen Sie Ihre Vermutungen zu beweisen.
- (*Visualisierung*) Lösen Sie die Gleichungen, welche zu den in b) und c) aufgestellten Matrizen und rechten Seiten gehören, entweder mit dem Backslash-Operator oder mit einem selbstgeschriebenen Löser (Aufgaben 1.2). Visualisieren anschließend die erhaltene Lösung. Versuchen σ so zu wählen, daß sich “interessante” Bilder ergeben.

Aufgabe 1.2: Implementieren direkter Verfahren

Implementieren Sie mit MATLAB die LR-Zerlegung und die Cholesky-Zerlegung als Spezialfall für symmetrische Matrizen. Welcher Zusammenhang besteht zwischen dem Profil der zu invertierenden Matrix und den Profilen der durch die Zerlegung ermittelten Dreiecksmatrizen?