Universität Konstanz
FB Mathematik & Statistik
Prof. Dr. M. Junk
Dr. M. Rheinländer

Ausgabe: 13. Nov., WS 07/08

Numerik von Gleichungssystemen

3. Übungsblatt

Aufgabe 3.1: Zerlegungsaufwand der LR-Zerlegung

Betrachten Sie das Gleichungssystem, welches sich aus unserem Modellproblem ergibt (Aufgabe 1.1). Das Verhältnis der Anzahl von Nicht-Nulleinträgen der Zerlegungsmatrizen L und R zu der Anzahl der Nicht-Nullelemente in der Systemmatrix A

$$q := \frac{\mathbf{nnz}(L+R)}{\mathbf{nnz}(A)} \qquad\qquad \mathbf{nnz} = \text{‘}\underline{\text{n}}\text{umber of }\underline{\text{n}}\text{on}\underline{\text{z}}\text{eros’}$$

ist ein Maß für den Aufwand, den die LR-Zerlegung erfordert. Wie verhält sich der Quotient bei zunehmender Verfeinerung des Gitters. Stellen Sie q in Abhängigkeit von N_x oder N_y(Anzahl der Gitterpunkte in x- bzw. y-Richtung) bzw. alternativ von h(Gitterweite) für ein festes rechteckiges Gebiet graphisch dar. Vergleichen Sie den Aufwand für die folgenden drei Fälle:

1) ohne Umnumerierung der Gitterknoten,
2) mit Umnumerierung durch den RCM-Algorithmus (Reverse Cuthill McKee),
3) mit Umnumerierung durch den AMD-Algorithmus (Approximate Minimal Degree).

Aufgabe 3.2: Zum Gesamtschrittverfahren(*Jacobi*) & Einzelschrittverfahren(*Gauß-Seidel*)

a) Um das Gesamtschrittverfahren anwenden zu können, ist es notwendig, daß sich auf der Diagonalen der Systemmatrix keine Nulleinträge befinden (ansonsten wäre D nicht invertierbar). Zeigen Sie, daß zu jeder invertierbaren Matrix A eine Permutationsmatrix P gefunden werden kann, derart daß alle Diagonalelemente der Matrix PA von Null verschieden sind.

b) Vergewissern Sie sich, daß sowohl das Gesamt- wie auch das Einzelschrittverfahren im Falle unseres Modelproblems eingesetzt werden können.

   Beweisen Sie dazu, daß es für die Konvergenz beider Verfahren hinreichend ist, wenn die betreffende Systemmatrix *streng diagonaldominant* oder *stark diagonaldominant* und *irreduzibel* ist.

c) Lösen Sie abermals das Modellproblem mit dem Gesamt- und dem Einzelschrittverfahren und plotten Sie das Residuum als Funktion der Iteration.