Universität Konstanz
FB Mathematik & Statistik
Prof. Dr. M. Junk
Dr. M. Rheinländer

Ausgabe: 17. Jan., WS 07/08

Numerik von Gleichungssystemen

7. Übungsblatt

Aufgabe 7.1: Zur Vorlesung (Theoretische Grundlagen & Ergänzungen)

a) Für $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $x \in \mathbb{R}^n$ definiert man

$$\mathcal{K}_m(A,x) := \text{span}\{x, Ax, ..., A^{m-1}x\}$$

als den *Krylov-Raum* der Ordnung $m \in \mathbb{N}_0$. Man zeige:

$$\dim\mathcal{K}_m(A,x) = \dim\mathcal{K}_{m+1}(A,x) \quad \Rightarrow \quad \mathcal{K}_m(A,x) = \mathcal{K}_{m+1}(A,x) = \mathcal{K}_{m+2}(A,x) = ...$$

b) Schließen Sie den Beweis aus der letzten Vorlesung (17.01.08) ab, indem Sie zeigen, daß beim *Verfahren der konjugierten Richtungen* folgende Beziehungen zwischen den A-orthogonalen Richtungsvektoren $d_0, ..., d_{n-1}$ und den Gradienten(Residuen) $g_1, ..., g_n$ mit $g_k := Ax_k - b$ bestehen.

$$\text{Für } k \in \{0, 1, ..., n-1\}: \qquad \langle g_{k+1}, d_k\rangle = \langle g_{k+1}, d_{k-1}\rangle = \ldots = \langle g_{k+1}, d_0\rangle = 0.$$

c) **(Projektion auf affin-lineare Teilräume)** Es sei $\mathcal{V}$ ein euklidischer Vektorraum mit dem Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Ferner sei $\mathcal{U} = \text{span}\{u_1, ..., u_m\} \subset \mathcal{V}$ ein Unterraum, welcher von den paarweise orthogonalen Vektoren $u_1, ..., u_m$ erzeugt wird. Für jedes $a_0 \in \mathcal{V}$ ist dann der zu $\mathcal{U}$ parallele affin-linearer Teilraum gegeben durch $a_0 + \mathcal{U} =: \mathcal{A}$. Beweisen Sie folgende Äquivalenz für $\overline{v} \in \mathcal{V}$ und $\overline{a} \in \mathcal{A}$:

$$\|\overline{v} - \overline{a}\| = \inf_{a\in\mathcal{A}} \|\overline{v} - a\| \quad \Leftrightarrow \quad \forall\, a \in \mathcal{A}: \ \langle \overline{v} - \overline{a}, a - \overline{a}\rangle = 0$$

Geben Sie auch eine Formel an, welche $\overline{a}$ mittels $\overline{v}, a_0$ und der Orthogonalbasis $u_1, ..., u_m$ darstellt.

Aufgabe 7.2: Intuitiv statt effektiv? – Verfahren konjugierter modifizierter Gradienten

Das folgende Verfahren versucht das Prinzip des Gradientenverfahrens mit der Idee des Verfahrens konjugierter Richtungen zu kombinieren:

Start: $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $d_0 := -g_0 := -(Ax_0 - b)$
Für $k = 0, 1, 2...$ *bis maximal* $n-1$:

- $\alpha_k = -\dfrac{\langle g_k, d_k\rangle}{\langle Ad_k, d_k\rangle}$
- $x_{k+1} = x_k + \alpha_k d_k$
- $g_{k+1} = g_k + \alpha_k A d_k$
- $d_{k+1} = -g_{k+1} + \sum_{j=0}^{k} \dfrac{\langle Ag_{k+1}, d_j\rangle}{\langle Ad_j, d_j\rangle} d_j$

Können Sie jede Zeile des Verfahrens interpretieren? Folgende Aussagen sind nachzuweisen:

1) $d_0, d_1, ...$ bilden eine Folge paarweise konjugierter Vektoren.

2) $\mathcal{U}_k := \text{span}\{d_0, ..., d_{k-1}\} \stackrel{!}{=} \text{span}\{g_0, ..., g_{k-1}\}$ und $\dim\mathcal{U}_k = k$.

3) $\mathcal{U}_k = \{g_0, Ag_0, ..., A^{k-1}g_0\}$

4) $g_k \perp \mathcal{U}_k$

5) $g_k \perp_A \text{span}\{d_0, d_1, ..., d_{k-2}\}$

6) $x_k = A^{-1}b \quad \Leftrightarrow \quad g_k = 0 \quad \Leftrightarrow \quad d_k = 0$ (Das Verfahren bricht in diesem Fall ab.)

Welche Auswirkung hat Eigenshaft 5) für den Algorithmus?

Aufgabe 7.3: Umsetzung & Testen des CG-Verfahrens

a) Programmieren Sie das CG-Verfahren zur Lösung linearer Gleichungssysteme in MATLAB und testen Sie es zunächst an niedrigdimensionalen Beispielen der Dimension $n < 20$. Achten Sie bei Ihrer Implementierung auf Effizienz und vermeiden Sie unnötige Berechnungen von Matrix-Vektorprodukten und Skalarprodukten.
Wie verhält sich das Verfahren, falls die Matrix A nicht symmetrisch und positiv definit ist? Vergleichen Sie es auch mit dem Gradientenverfahren.

b) Wenden Sie das CG-Verfahren auf das Modellproblem (Aufgabe 1.1) an. Wie ändert sich der Fehler von Iteration zu Iteration?

c) Läßt sich das CG-Verfahren auch ohne explizites Aufstellen der Systemmatrix implementieren?