Universität Konstanz
FB Mathematik & Statistik
Prof. Dr. M. Junk
Dr. Z. Yang

Ausgabe: 29. 11. 2011

Strömungssimulation mit LBM

Blatt 01

Aufgabe 1:

Um die eindimensionale Differentialgleichung

$$\partial_t \rho + \partial_x (a\rho) = \nu \partial_x^2 \rho \quad \text{mit } a, \nu \text{ konstante} \tag{1}$$

numerisch zu lösen, benutzen Sie den LB Algorithmus aus Kapitel 3

$$f_i(t+\Delta t, x+\Delta x c_i) = f_i(t,x) + C_i(f)(t,x), \quad C_i(f) = \omega(f_i^{eq}(u) - f_i), \quad i = 1,2 \tag{2}$$

wobei $\Delta t = \Delta x^2$, $c_1 = -1$, $c_2 = 1$ und $f_i(t,x) = f(t,x,c_i)$. Die Gleichgewichtsverteilung $f_i^{eq}(u)$ ist definiert durch

$$f_i^{eq}(u) = \frac{u}{2}(1 + \Delta x a c_i), \quad u = f_1 + f_2. \tag{3}$$

a) Für (1) gibt es 1-periodische Lösungen der Form

$$\rho(t,x) = \exp(-\alpha t)\sin(\beta x - \gamma t), \tag{4}$$

bestimmen Sie die Konstanten α, β und γ.

b) Bestimmen Sie ω im Lattice Boltzmann Algorithmus (2).

c) Programmieren Sie den Algorithmus im Gebiet $x \in [0,1)$ mit periodischer Randbedingung. Zeichnen Sie die numerische Lösung $u(t, x^*)$ als Funktion der Zeit in $x^* = 0$. Diskutieren Sie, welche die folgenden Anfangswerte gut und welche schlecht sind:

$$\begin{aligned} (I) &: f_i(0,x) = 0; \\ (II) &: f_i(0,x) = \frac{1}{2}\bar{u}(x); \\ (III) &: f_i(0,x) = f_i^{eq}(\bar{u}(x)); \\ (IV) &: f_i(0,x) = f_i^{eq}(\bar{u}(x)) - \frac{\Delta x}{2\omega}\partial_x \bar{u}(x) c_i. \end{aligned} \tag{5}$$

Hierbei ist $\bar{u}(x) = \rho(0,x)$ mit ρ aus (4). Berechnen Sie die numerische Konvergenzrate mit verschiedener Gitterweiten Δx im Fall (IV).