Universität Konstanz
FB Mathematik & Statistik
Prof. Dr. M. Junk
Dr. Vita Rutka

Ausgabe: 29.05.2007
Abgabe: **Dienstag**, 05.06.2007, 14:00
(F 408)

Modellierung

http://www.math.uni-konstanz.de/numerik/Lehrveranstaltungen/Modellierung.html

Aufgabenblatt 5

Aufgabe 1 Sei Γ eine Kurve im $\mathbb{R}^2$, gegeben durch die *Parameterisierung*

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \quad , \quad t \in [a,b] \subset \mathbb{R} \quad , \quad a < b\,.$$

Beispiel: $x(t) = 2\cos(t)$, $y(t) = 2\sin(t)$ mit $t \in [0, \pi/2]$ ergibt einen Viertelkreis.

Eine Kurve heisst *glatt* falls die Funktionen $x(t)$ und $y(t)$ glatt sind. Von nun an betrachten wir nur glatte Kurven.

1. Wie lautet die mathematische Bedingung dafür, dass die Kurve sich selbst nicht schneidet, aus?

2. Erklären Sie, warum die Länge L der Kurve mittels des Integrals

$$L = \int_a^b \sqrt{(x'(\xi))^2 + (y'(\xi))^2}\,\mathrm{d}\xi$$

berechnet werden kann!

Hinweis: Definitionen des Integrals und der Ableitung!

3. Wir definieren

$$g(t) := \int_a^t \sqrt{(x'(\xi))^2 + (y'(\xi))^2}\,\mathrm{d}\xi\,.$$

Wie kann die Grösse $s := g(t)$ interpretiert werden?

4. Zeigen Sie, dass die Parameterisierung

$$\begin{pmatrix} \tilde{x}(s) \\ \tilde{y}(s) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x(g^{-1}(s)) \\ y(g^{-1}(s)) \end{pmatrix} \quad , \quad s \in [0, L]$$

der Kurve Γ Folgendes erfüllt:

$$(\tilde{x}'(s))^2 + (\tilde{y}'(s))^2 = 1\,.$$

5. Ein Teilchen mit Masse m bewegt sich entlang der Kurve Γ mit *konstanter* Geschwindigkeit v (im Sinne des Betrags des Geschwindigkeitsvektors). Wie kann die Bewegung des Teilchens beschrieben werden? (Wir wollen die "Standardformeln" zum Berechnen der Geschwindigkeit, Beschleunigung, u.s.w. weiterhin benutzen!)

6. Wie würden Sie die *durchschnitliche Beschleunigung* eines solchen Teilchens entlang der Kurve Γ definieren? (Formel?)