

Modellierung

<http://www.math.uni-konstanz.de/numerik/Lehrveranstaltungen/Modellierung.html>

Aufgabenblatt 7

Aufgabe 1 Die Trajektorie Γ eines Teilchens mit der Masse m sei gegeben durch

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}, \quad t \in [a, b], \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

Ferner sei $\tilde{\gamma}(s)$ die entsprechende Bogenlängenparameterisierung mit dem Bogenlängenparameter s (siehe Blatt 5). Dann ist die *Krümmung* κ der Kurve Γ gegeben durch

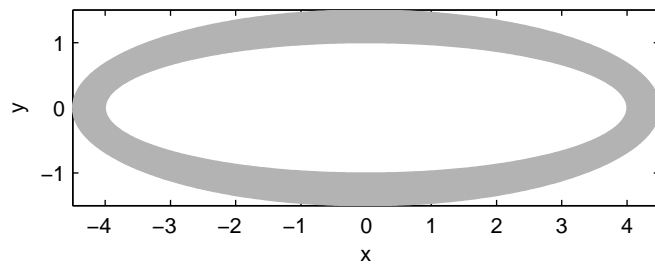
$$\kappa(s) := \|\tilde{\gamma}''(s)\|.$$

1. Berechnen Sie die auf das Teilchen wirkende Kraft F !
2. Sei $n(t)$ der Normalvektor zu der Kurve Γ im Punkt $\gamma(t)$. Berechnen Sie die *Normalkomponente* F_n der Kraft F (die Projektion der Kraft auf den Vektor $n(t)$).
3. Welcher Zusammenhang besteht zwischen der Krümmung und F_n ? (Formell!)
4. Wie ändert sich F_n , wenn ein Teilchen die Kurve Γ zweimal schneller durchfliegt, als durch $\gamma(t)$ vorgegeben?
5. Wenn $\gamma(t)$ die Trajektorie eines Autos auf der durch Γ beschriebenen Strasse darstellt, wie kann dann F_n interpretiert werden?
6. Kann aus dem Zusammenhang zwischen der Krümmung und F_n abgeleitet werden, warum enge Autobahnausfahrten 'unangenehmer' zu durchfahren sind als grosszügig ausgebaute? (Angenommen, man fährt mit 60km/h.)
7. **Ein virtuelles Formel-1 Rennen.** Die Innenseite einer Rennstrecke wie in der Abbildung unten ist parameterisiert durch

$$x_{inn}(\varphi) = 4 \cos \varphi, \quad y_{inn}(\varphi) = \sin \varphi, \quad \varphi \in [0, 2\pi].$$

Die Aussenseite ist gegeben durch

$$x_{out}(\varphi) = 4.5 \cos \varphi, \quad y_{out}(\varphi) = 1.5 \sin \varphi, \quad \varphi \in [0, 2\pi].$$



Das Ziel ist nun, die Strecke möglichst schnell zu durchfahren. Dabei darf die Fliehkraft den maximalen Wert 4 nicht überschreiten, da sonst der Wagen aus der Kurve fliegt.

Wer findet die beste Trajektorie?

Alle Mittel (wie, zum Beispiel, Matlab oder Maple) sind erlaubt!