Universität Konstanz
FB Mathematik & Statistik
Prof. Dr. M. Junk
Dr. M. Rheinländer

Ausgabe: 05. Juni, SS 08

Mathematische Modellierung

4. Übungsblatt

Aufgabe 4.1: Zum Vektorprodukt

a) Wiederholen Sie Definition und Eigenschaften des Vektorprodukts.

b) Wie sieht die Matrixdarstellung der Abbildung $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{a} \times \mathbf{x}$ aus? Welche besonderen Eigenschaften hat die zugehörige Matrix?

c) Beweisen Sie die Gleichung

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \langle \mathbf{a}, \mathbf{c} \rangle \mathbf{b} - \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle \mathbf{c}.$$

Wie läßt sich $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$ entsprechend umformen?

d) Welcher Zusammenhang besteht zwischen Drehungen und dem Vektorprodukt?

Aufgabe 4.2: Die Kugel auf der rotierenden Scheibe

Eine (homogene) Kugel befinde sich ruhend auf einer waagerechten Ebene (z.B. auf einem großen Teller). Wie bewegt sich die Kugel, wenn die Ebene (plötzlich) um eine vertikale Achse mit der Winkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{\Omega} = (0, 0, \Omega)^\top$ gedreht wird? Dabei ist anzunehemen, daß die Kugel ausschließlich über die Ebene rollen nicht aber rutschen bzw. gleiten kann.
Versuchen Sie zunächst gefühlsmäßig einzuschätzen, wie sich die Kugel möglicherweise im Gegensatz zu einem kleinen Klötzchen verhalten wird, bevor Sie damit beginnen, die Situation genauer zu analysisieren. Leiten Sie sodann eine Differentialgleichung für die Schwerpunktskoorodinaten her und versuchen Sie diese zu lösen[1].

Hilfen: Im Auflagepunkt der Kugel kann nur eine tangential (bzw. horizontal) angreifende Kraft $\mathbf{F} = (F_1, F_2, 0)^\top$ wirken, wenn wir von der Schwerkrft absehen, die durch die Ebene kompensiert wird. Diese "Zwangskraft" muß so geartet sein, daß die Rollbedingung realisiert wird. Aus der Vorlesung ergeben sich die Gleichungen

$$m\ddot{\mathbf{s}} = \mathbf{F} \tag{1}$$
$$J\dot{\boldsymbol{\omega}} = (\mathbf{a} - \mathbf{s}) \times \mathbf{F} \tag{2}$$

mit den Bezeichnungen:

m : Masse der Kugel,
J : Trägheitsmoment der Kugel,
$\mathbf{s} = (s_1, s_2, s_3)^\top$: Koordinaten des Schwerpunkts in einem raumfesten System,
$\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)^\top$: Koordinaten des Auflagepunkts im raumfesten System
$\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)^\top$: Winkelgeschwindigkeit der Kugel bzgl. Drehung um Schwerpunkt im raumfesten System.

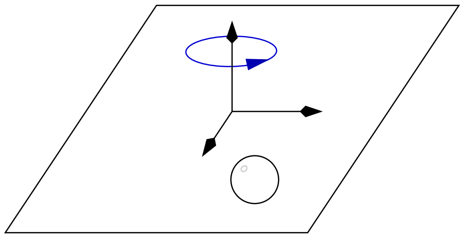
a) Warum gilt $\omega_3 = 0$? Welcher Zusammenhang besteht zwischen $\mathbf{a}$ und $\mathbf{s}$. Geben Sie die Koordinatendarstellung von $\mathbf{b} := \mathbf{a} - \mathbf{s}$ an, wenn das raumfeste System so gewählt ist, daß die x_3-Achse mit der Drehachse zusammenfällt.

b) Formulieren Sie die *Rollbedingung*, welche das System (1), (2) um eine weitere ergänzt. Konkret: stellen Sie eine Beziehung her, die insbesondere die Winkelgeschwindigkeiten $\boldsymbol{\Omega}$ und $\boldsymbol{\omega}$ mit der Schwerpunktsgeschwindigkeit $\dot{\mathbf{s}}$ verknüpft.

[1] Das Lösen der Differentialgleichung bleibt Teilnehmern ab dem vierten Semester vorbehalten.

c) Lösen Sie diese unter Ausnutzung bestimmter Orthogonalitätsbeziehungen (siehe a) nach $\boldsymbol{\omega}$ auf.

d) Leiten Sie eine Differentialgleichung für $\mathbf{s}$ her, in welcher $\mathbf{F}$ eliminiert ist.



Aufgabe 4.3: Von der rutschenden und zur rollenden Kugel

Eine Kugel mit konstanter Dichte befinde sich auf einer Ebene, auf der Sie mit einem bestimmten Gleitreibungskoeffizieneten rutschen oder reibungsfrei rollen kann. Wie bewegt sich die Kugel, wenn sie angestoßen wird bzw. wie hängt die Bewegung von der Höhe des Anstoßpunktes ab? Ist es möglich, daß die Gleitbewegung in eine Rollbewegung übergeht? Versuchen Sie diesen Vorgang mittels Differentialgleichungen zu beschreiben. Überlegen Sie auch, ob man die Kugel so anzustoßen kann, daß sie von Beginn an nur rollt.
Hinweis: Reduzieren Sie die Fragestellungen auf ein zweidimensionales Problem.

Weitere Aufgaben zum Nachdenken

Aufgabe 4.4: Die gefährliche Leiter

Eine Leiter lehnt an der Wand. Überlegen Sie (anhand geeigneter Berechnungen), unter welchen Umständen die Leiter ins Rutschen geraten kann.

Aufgabe 4.5: Zwangsbedingungen des starren Körpers

Es soll ein starrer Körper betrachtet werden, welcher aus endlich vielen Punktteilchen besteht. Die Punktteilchen kann man sich durch idealisierte, masselose Stäbe miteinander verbunden denken (Drahtmodell). Beschreiben Sie die "Starrheit" des Körpers mittels geeigneter Zwangsbedingungen wie Abstandsbedingungen oder Nicht-Knickbedingungen. Gibt es alternative Möglichkeiten? Wieviele der Zwangsbedingungen (Gleichungen) sind mindestens notwendig, bzw. was ist die Maximalzahl unabhängiger Bedingungen (in 2D bzw. 3D)?
Demonstrieren Sie Ihre Aussagen anhand eines Beispiels und schreiben Sie ggf. ein kleines MATLAB-Programm, um die Abhängigkeit bzw. Unabhängigkeit von Zwangsbedingungen nachzuweisen.