1. Einleitung

Ziel der mathematischen Modellierung ist es, ein vereinfachtes Abbild von Dingen und Zusammenhängen unserer Umwelt zu schaffen, um deren Zusammenspiel genau zu studieren und zu verstehen.

So lässt sich zum Beispiel mit einem vereinfachten Abbild des Mediums Luft das Zusammenwirken von Strömungen und beweglichen Geometrien untersuchen, um dann gezielt optimale treibstoffsparende Tragflächenformen oder geräuscharme Windradflügel zu konstruieren.

Bevor wir solche komplizierten Modellierungsprozesse strukturiert angehen können, müssen wir aber zunächst konkretisieren, wie wir prinzipiell Dinge unserer Umwelt beschreiben. Dazu entwickeln wir eine Beschreibungssprache, die zusammen mit bestimmten logischen Argumentationsregeln erlauben wird, Modelle aufzustellen und Schlussfolgerungen aus den Modellsituationen zu ziehen.

In gewisser Weise ist diese Sprache selbst ein Modell: indem sie menschliche Denkprozesse widerspiegelt, ist sie eine Abstraktion unserer Weltwahrnehmung. Wir beginnen nun damit, diese Weltwahrnehmung etwas unter die Lupe zu nehmen, um sie danach in einigen wesentlichen Teilen zu kopieren.

Wenn wir über konkrete Dinge sprechen, benutzen wir Wörter wie Apfel, Wolke oder Brille. Das Wort Brille im Satz „Ich trage eine Brille.“ steht aber nicht nur für das Ding auf meiner Nase, sondern es ist Stellvertreter für viele Dinge mit der Funktion, Sehfehler zu korrigieren.

Dabei unterscheiden sich Brillen von anderen Sehhilfen wie Zwickern, Monokeln oder Kontaktlinsen dadurch, dass Brillen zwei Bügel haben, die in Kombination mit den Ohren für Halt auf der Nase sorgen.

Schon dieses kleine Beispiel zeigt, wie wir Dinge nach gewissen Ähnlichkeiten zusammenfassen oder bei fehlender Ähnlichkeit unterscheiden.

Für weitere Beispiele brauchen wir uns nur umzuschauen: Eine Buche ist anders als eine Eiche, aber beides sind Laubbäume. Ein Kugelschreiber unterscheidet sich von einem Bleistift, aber beides sind Schreibgeräte usw.

Wir nennen nun das, was Dinge unterscheidbar bzw. zusammenfassbar macht *Eigenschaften* und speziellen Eigenschaftskombinationen geben wir *Namen* wie Apfel, Wolke oder Brille.

Man sagt dann, ein Ding *ist* eine Brille, wenn es alle dazugehörigen Eigenschaften hat. Andersherum gesehen ist die Eigenschaftskombination Brille eine *Abstraktion* von dem Ding auf meiner Nase, denn dieses Ding hat noch viel mehr Eigenschaften (insbesondere die, jetzt genau auf meiner Nase zu sein).

Wenn man darüber nachdenkt, was Dinge überhaupt unterscheidbar oder zusammenfassbar macht, so findet man in vielen Fällen die *Wirkung*, die Dinge im Zusammenspiel mit anderen Dingen haben. Eine Wirkung oder Funktion zu haben, führt also zu Eigenschaften.

Insbesondere beziehen sich Eigenschaften wie Farbe, Geruch, Textur, Geschmack, Gewicht, Temperatur usw. auf die Wirkung von Dingen im Zusammenspiel mit der menschlichen Sensorik.

Die Gesamtfunktionalität eines Dings ergibt sich oft aus der Tatsache, dass es aus mehreren *Teilen* besteht, wobei diese Teildinge jeweils gewisse Wirkungen entfalten. Bei der Brille bewirkt zum Beispiel das Zusammenspiel von Bügeln und Ohren, dass die Beweglichkeit eingeschränkt ist. Das Zusammenspiel der Linsen mit der Horn- und Netzhaut bewirkt die Korrektur des Sehfehlers. Der Nasensteg hat die Funktion, im Zusammenspiel mit dem Nasenrücken Druckstellen zu vermeiden usw.

Die Angabe von Teilen ist damit eine Möglichkeit, eine große Eigenschaftsliste in mehrere Abschnitte zu unterteilen und so Übersichtlichkeit herzustellen.

1.1. Erste Formalisierungen

Wie wir in der Vorbetrachtung gesehen haben, beruhen sprachliche Beschreibungen auf *Abstraktionen* realer Dinge, die mit Wörtern gekennzeichnet werden und letztlich für eine Liste von Eigenschaften stehen. In unserer Modellierungssprache werden wir in ähnlicher Weise Abstraktionen durch Vorgabe von Eigenschaften mathematischer *Strukturen* beschreiben.

Einige dieser Strukturen (die sog. *Objekte*) verhalten sich dabei ähnlich zu real existierenden, unverwechselbaren Dingen, wie etwa konkrete reelle Zahlen 0,-1,5/2,π, etc.

Andere Strukturen sind offensichtliche Abstraktionen, weil die zugehörige Beschreibung mehrere Beispiele zulässt. Das Konzept des *Anteils* als eine Zahl, deren Wert zwischen 0 und 1 liegt, wäre ein solches Beispiel.

Es ist allerdings auch möglich, Abstraktionen anzugeben, für die es *keine* Beispiele gibt, wie etwa: eine Zahl, die kleiner ist als sie selbst. Generell sind Abstraktionen, deren innere Eigenschaften widersprüchlich sind, irreal in dem Sinne, dass sie sich nicht durch ein Beispiel realisieren lassen. Insbesondere sind damit auch Folgerungen, die sich aus widersprüchlichen Abstraktionen ergeben irrelevant. Trotzdem kommt der Beispiellosigkeit an sich eine gewisse Bedeutung im Aufbau der Mathematik zu.

Der im Vergleich zur Beispiellosigkeit gegenteilige Extremfall betrifft Abstraktionen, für die zu viele (wir sagen *unfassbar* viele) Beispiele existieren.

Prominent ist hier die Russelsche Abstraktion R: jedes Beispiel von R ist eine Struktur, die nicht Beispiel von sich selbst ist. Zu R kann man sehr leicht sehr viele Beispiele angeben. Ein Problem tritt aber auf, wenn man R selbst den Status einer Struktur gibt und dann die Frage untersucht, ob R ein Beispiel von sich selbst ist, oder nicht: Wenn R ein Beispiel für sich selbst wäre, dann müsste R die R-Eigenschaft erfüllen und wäre danach kein Besipiel von sich selbst – das geht also nicht. Ist R aber kein Beispiel von sich selbst, dann ist die R-Eigenschaft erfüllt und R ist doch ein Beispiel für sich selbst – ein unauflösbares Dilemma.

Um ein solches logisches Fiasko zu vermeiden, werden wir nur *fassbaren*

Abstraktionen wieder den Rang einer Struktur geben. Fassbar ist eine Abstraktion dann, wenn alle ihre Beispiele auch Beispiele einer bereits vorhandenen (und damit überschaubaren) Struktur sind. Für unsere Anfangsbeispiele wird dies immer der Fall sein, so dass wir zunächst nicht zwischen Abstraktionen und Strukturen unterscheiden.

Die Notation zum Ausdrücken der Eigenschaft, dass eine Strukur x Beispiel für eine Abstraktion B ist, lautet $x : B$. Wir lesen den Doppelpunkt dabei als *ist*, oder genauer als *ist ein Beispiel von*.

Die Sprachregelung zur Bildung von Abstraktionen konzentriert sich auf die entscheidenden Bausteine: Namen als *Platzhalter* zur Aufnahme möglicher Beispiele und eine Liste von *Aussagen*, die sich auf die Platzhalternamen beziehen. Die Bestandteile werden mit den Klammern $\lceil\ \rfloor$ eingerahmt und durch Kommata sowie das Schlüsselwort **mit** voneinander getrennt. Die resultierende Struktur nennen wir einen *Kontext*. Als Beispiel für einen solchen Kontext betrachten wir[1]

$$\lceil p \ \textbf{mit} \ p : \text{Zahl},\ p \geq 0, p \leq 1 \rfloor$$

wobei man die öffnende Klammer als *eine Abstraktion bestehend aus ...* liest. Das Zeichen p ist hier der Name des Platzhalters, und die drei Eigenschaften $p : \text{Zahl}$, $p \geq 0$ und $p \leq 1$ werden gefordert. Ein sinnvoller Name für diese Struktur wäre *Anteil*. Er kann mit dem := Symbol vereinbart werden, das für das Textfragment *ist definiert als* steht, also

$$\text{Anteil} := \lceil p \ \textbf{mit} \ p : \text{Zahl},\ p \geq 0, p \leq 1 \rfloor$$

Die gesamte Definitionszeile liest sich damit als: *Anteil ist definiert als eine Abstraktion bestehend aus ...* gefolgt vom Inhalt zwischen den Klammern. Anstelle dieser etwas sperrigen Form, benutzen wir im Fall der Namensvergabe lieber die äquivalente Schreibweise

$$p : \text{Anteil} :\Leftrightarrow p : \text{Zahl},\ p \geq 0, p \leq 1 \ \square$$

[1] Wir gehen hier davon aus, dass die Struktur *Zahl* bereits eingeführt ist zusammen mit den aus der Grundschule bekannten Rechenregeln und Operationszeichen $+, -, <, \leq$ etc. Eine detaillierte Modellierung wird in Kapitel 8 vorgestellt.

mit der wir die Rolle der Abstraktion als Beschreibung eines typischen Beispiels betonen. Wenn das Zeichen $:\Leftrightarrow$ als *definitionsgemäß genau dann, wenn* gelesen wird, ergibt die Zusammensetzung der Textfragmente zu den benutzten Symbolen die intuitiv leicht erfassbare Beschreibung *p ist ein Anteil definitionsgemäß genau dann, wenn ...* gefolgt von der Liste der Bedingungen.

Beispiele für Anteile sind etwa $0, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$. Dabei muss zur Überprüfung ob die Aussage 0 : Anteil tatsächlich vorliegt, der Platzhalter p durch die Struktur 0 ersetzt und die resultierenden Eigenschaften 0 : Zahl, $0 \geq 0$, $0 \leq 1$ überprüft werden. Sind sie erfüllt, dann kann auch mit 0 : Anteil weitergearbeitet werden.

Zur Formulierung von Kontexten, die Eigenschaften mehrerer Bestandteile kodieren, gibt man statt eines einzelnen Platzhalters eine Sequenz unterschiedlicher Platzhalternamen an. Das folgende Beispiel zeigt dazu eine Abstraktion von größengeordneten Anteilpaaren, die sich zu 1 aufaddieren. Aus Gründen der Übersichtlichkeit haben wir Zeilenumbrüche ein- und Kommentare hinzugefügt (d.h. Zeilen mit vorangestelltem $\cdot$)

$$
\begin{array}{l}
\text{Anteilpaar} := \lceil p, q \ \textbf{mit} \\
\quad p : \text{Anteil}, \\
\quad q : \text{Anteil}, \\
\quad \cdot \ \text{Größenbedingung} \\
\quad p \leq q, \\
\quad \cdot \ \text{Summenbedingung} \\
\quad p + q = 1 \rfloor
\end{array}
$$

Konkrete Beipiele zu einem Kontext mit mehreren Platzhaltern sind üblicherweise *Listen*, deren Einträge durch eckige Klammern [ ] umschlossen und mit Kommata voneinander getrennt. Zur Überprüfung ob $[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$: Anteilpaar vorliegt, werden die Platzhalter p, q in der entsprechenden Reihenfolge durch die Listeneinträge ersetzt und die resultierenden Eigenschaften überprüft. Da es auf die Reihenfolge ankommt, findet man so heraus, dass $[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$ ein Anteilpaar ist, nicht aber $[\frac{2}{3}, \frac{1}{3}]$, weil in diesem Paar die Größenbedingung verletzt ist.

Bei der intuitiveren Scheibweise der Definition von *Anteilpaar* werden die Platzhalter gemäß der besprochenen Listenschreibweise geklammert

$[p, q]$: Anteilpaar $:\Leftrightarrow$ p : Anteil, q : Anteil, $p \leq q$, $p + q = 1$ □

Generell ist es bei der Modellierung einer konkreten Fragestellung sinnvoll, die Kontexteigenschaften so zu formulieren, dass sie die Gegebenheiten möglichst direkt repräsentieren und dadurch leicht zu überprüfen sind. Anschließend versucht man dann, aus diesen Ausgangseigenschaften weitere automatisch geltende Eigenschaften abzuleiten, um so letztlich eine Antwort auf die Fragestellung zu erreichen. Dazu benutzt man eine präzise reglementierte Argumentationssprache, die wir in einem späteren Kapitel vorstellen werden.

Als Beispiel für eine automatisch geltende Zusatzeigenschaft im Kontext Anteilpaar erwähnen wir $p \cdot q \leq \frac{1}{4}$ (die Begründung könnte in diesem Fall wegen $q = 1 - p$ durch Lösen der quadratischen Ungleichung $p \cdot (1 - p) \leq \frac{1}{4}$ erzielt werden). Zum Formulieren einer solchen Konsequenz benutzen wir das allgemeine Schema **In** K **gilt** F, wobei K ein Kontext ist und F für eine Eigenschaft steht, im konkreten Fall also

In Anteilpaar **gilt** $p \cdot q \leq \frac{1}{4}$

Eine solche Formulierung nennen wir auch einen mathematischen *Satz*, bzw. eine Satzaussage, da es sich insgesamt um eine Aussage über den angegebenen Kontexts handelt. Da die Begründung der angegebenen Konsequenz nur auf den im Kontext aufgelisteten Eigenschaften beruht, ist sie auch für jedes Beispiel von Anteilpaar gültig. Als alternative Schreibweise im Fall von Kontexten ohne eigenen Namen nutzt man daher die *für-alle-Beispiele-gilt* Formulierung, d.h. statt **In** $\lceil x$ **mit** $B\rfloor$ **gilt** F schreiben wir auch

$\forall x$ **mit** B **gilt** F

wobei das $\forall$ Zeichen als *für alle Beispiele* oder kurz als *für alle* gelesen wird.

Mit den Satzauusagen können wir nun einige weitere Eigenschaften einführen. Sind S, T Platzhalter für zwei Abstraktionen, so bezeichnen wir die Eigenschaft

$\forall x$ **mit** $x : S$ **gilt** $x : T$

mit $S :: T$ (lies S *spezialisiert* T). Wenn nämlich alle Beispiele von S auch Beispiele von T sind, dann ist S ein spezielleres Konzept als T und T damit ein Oberbegriff zu S.

Gilt neben $S :: T$ auch $T :: S$, dann haben S und T genau die gleichen Beispiele und sind damit als Abstraktionen gleichwertig. Wir schreiben diese Geichwertigkeitseigenschaft auch als $S = T$. In Argumentationen hat sie zur Folge, dass S und T in Verknüpfungsausdrücken gegeneinander getauscht werden können.

Bevor wir uns die Regeln der Modellierungssprache im Detail anschauen, wollen wir einige einfache Beispiele vorstellen, um verschiedene Grundideen zu verdeutlichen.

1.2. Einheitliche Darstellung von Definitionen

In Mathematikvorlesungen werden Definitionen oft durch eine Mischung aus umgangssprachlichen und formalen Textfragmenten dargestellt, wie in folgendem Beispiel der Definition eines metrischen Raumes.

> Definition: Sei X eine Menge und $d : X \times X \to \mathbb{R}$ eine Abbildung. Wir nennen das Paar X, d einen metrischen Raum, wenn für jedes $x, y, z \in X$ gilt
>
> 1. $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ (Definitheit)
> 2. $d(x, y) = d(y, x)$ (Symmetrie)
> 3. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (Dreiecksungleichung)

Es handelt sich hierbei um ein Modell des Abstandmessens zwischen Punkten im Raum. Dabei übernimmt die Metrik d die Rolle des Maßbandes, wobei das erste Argument für den Startpunkt und das zweite Argument für den Zielpunkt steht, an dem der Abstand abgelesen wird, der danach als Funktionswert der Metrik zur Verfügung steht. Die drei geforderten Bedingungen sind uns von Maßbändern bestens bekannt: (1) Der Abstand zwischen zwei Punkten ist genau dann Null, wenn die beiden Punkte identisch sind. (2) Ob man von einem zum anderen Punkt misst oder umgekehrt, spielt keine Rolle. (3) Ein Umweg über einen dritten Punkt kann nie kürzer sein als die direkte Verbindung.

Maßbänder im Raum sind allerdings nicht die einzigen Situationen, die zu dieser Abstraktion führen. Der Abstand zwischen Start- und Zielpunkt entlang eines gegebenen Straßennetzes unterscheidet sich zum Beispiel vom Maßbandabstand, wenn etwa Kurven, Kreuzungen oder Einbahnstraßen eine Abweichung von der geraden Verbindung erzwingen. Trotzdem gelten auch für den kürzesten Abstand in einem Straßennetz die drei angegebenen Eigenschaften. Das gleiche kann für andere Abstandkonzepte gelten, die nicht einmal geometrisch interpretiert werden, wie etwa die Distanz zwischen zwei Bitkodierungen von Zeichen eines Alphabets.

Mit der vorgestellten Schreibweise, lässt sich diese Definition leicht dastellen, wobei Zusatzerklärungen in Kommentarzeilen untergebracht werden können, um die Lesbarkeit zu erleichtern.

$[X, d\,]$: metrischerRaum :$\Leftrightarrow$
X : Menge,
· Metrik
$d \in \mathcal{F}(X \times X, \mathbb{R})$,
· Definitheit
$\forall x, y$ **mit** $x \in X, y \in X$ **gilt** $d(x, y) = 0 \;\Leftrightarrow\; x = y$,
· Symmetrie
$\forall x, y$ **mit** $x \in X, y \in X$ **gilt** $d(x, y) = d(y, x)$,
· Dreiecksungleichung
$\forall x, y, z$ **mit** $x \in X, y \in X, z \in X$ **gilt** $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ $\square$

Generell ist der Vorteil der einheitlichen Darstellung, dass durch das Fehlen von Umgangssprache mögliche Mehrdeutigkeiten vermieden werden. Außerdem ist das Prüfverfahren, ob eine Struktur Beispiel der Abstraktion ist, leichter durchführbar, da die Bedingungen nicht aus einem Text zusammengesucht werden müssen. Während eine textliche Beschreibung eine Einteilung in wesentliche und weniger wichtige Bedingungen suggerieren kann, ist dies durch die systematische Anordnung in der standardisierten Darstellung nicht so leicht möglich.

Um aber eine Flut von schwer lesbaren, reinen Symbolketten zu vermeiden, ist es sinnvoll, Teilabstraktionen durch passende Worte abzukürzen, damit insgesamt sinnvoll klingende Formulierungen entstehen.

1.3. Ein Rätsel

In diesem Beispiel ist eine typische Knobelsituation zu modellieren, bei der es darum geht, das Alter der beteiligten Personen herauszufinden:

Jana ist 9 Jahre älter als Levin und zusammen sind sie 21.

Eine Lösung des Rätsels wird durch gewisse, in der Geschichte kodierte Bedingungen, beschrieben. Wir fassen diese in einem Kontext zusammen (lies: *Das Paar* $[J, L]$ *ist eine* Rätsellösung *definitionsgemäß genau dann, wenn* ...)

$[J, L]$: Rätsellösung $:\Leftrightarrow$
· Janas Alter
J : Zahl,
· Levins Alter
L : Zahl,
· Jana ist 9 Jahre älter
$J = L + 9$,
· gemeinsames Alter
$J + L = 21$ $\square$

Offensichtlich ist das Rätsel gelöst, wenn wir ein Beispiel zu Rätsellösung gefunden haben. Dabei bezeichnen wir die Eigenschaft, dass für eine Abstraktion A ein Beispiel vorliegt kurz mit $\exists A$ (lies *es existiert ein Beispiel zu* A oder auch kurz *es gibt ein* A, wenn A durch ein Hauptwort beschrieben ist).

Das Rätsel besteht also aus der Frage, ob die Aussage ∃Rätsellösung wahr ist, was wir durch Anhängen eines Fragezeichens ∃Rätsellösung*?* an die Aussage notieren.

Zur Beantwortung der Frage muss man versuchen, die Wahrheit der Existenzaussage zu begründen, oder mit anderen Worten, sie zu *beweisen*. Schafft man es, so ist die Antwort auf die Frage *Ja*.

Um uns einer solchen Antwort zu nähern, untersuchen wir zunächst, ob die bekanntgegebenen Eigenschaften das Alter der Kinder bereits festlegen. Tatsächlich gelten die beiden Sätze

In Rätsellösung **gilt** $L = 6$
In Rätsellösung **gilt** $J = 15$

Die Begründung für diese Gesetzmäßigkeiten funktioniert folgendermaßen: Weil $J = L + 9$ gilt, können wir in der Eigenschaft $J + L = 21$ die Struktur J durch $L + 9$ ersetzen (wegen unserer Vereinbarung zum Gleichheitssymbol) und erhalten damit $(L + 9) + L = 21$. Um jetzt weitermachen zu können, brauchen wir besondere Eigenschaften der Struktur Zahl, die wir alle aus der Grundschule kennen (der Prozess des Rechnens oder das Umformen von Verknüpfungsausdrücken ist nichts anderes, als ein ständiges *Argumentieren* mit diesen Eigenschaften). Dazu gehört, dass man die Klammer weglassen und die Reihenfolge der Terme in der Addition vertauschen darf, was letztlich zu $L+L+9 = 21$ führt. Mit der Eigenschaft $21-9 = 12$ und einer Ersetzung ergibt sich dann $(L+L+9)-9 = 12$. Einige weitere Zahl-Eigenschaften führen dann auf $2 \cdot L = 12$ und schließlich $L = 6$. Mit einer Ersetzung in $J + L = 21$ finden wir dann am Ende auch $J = 15$.

Diese beiden Sätze lassen sich auch zusammenfassen

In Rätsellösung **gilt** $[J, L] = [15, 6]$

wobei die Gleichheit von Listen auf die Gleichheit ihrer entsprechenden Einträge zurückgeführt wird. Zunächst sagt der Satz nur aus, dass es nicht zwei verschiedene Beispiele geben kann, da jedes Beispiel eben gleich $[15, 6]$ ist. Diese Eigenschaft notieren wir mit !Rätsellösung und sprechen sie als *Rätsellösung hat höchstens ein Beispiel* oder als *Rätsellösung ist eindeutig* aus.

Um zu zeigen, dass $[15, 6]$ auch ein Beipiel *ist*, müssen wir noch die Probe machen, d.h. mit Rechenregeln begründen, dass $[15, 6]$ die geforderten Eigenschaften erfüllt und somit

$$[15, 6] : \text{Rätsellösung}$$

wahr ist. Insgesamt haben wir dann $\exists$Rätsellösung und !Rätsellösung gezeigt. Diese spezielle Situation einer Abstraktion, genau ein Beispiel zu besitzen, notieren wir mit der Zeichenkombination $\exists!$Rätsellösung, da sie sehr häufig von Interesse ist (wir lesen *es gibt genau eine Rätsellösung*).

Für den Zugriff auf das einzige Beispiel einer Abstraktion A, die $\exists!A$ erfüllt, benutzen wir einen nach unten gerichteten Pfeil, d.h. $\downarrow A$ steht für *das Beispiel von* A. Der Pfeil symbolisiert dabei die Abnahme der Abstraktionsebene beim Übergang von der Abstraktion eines einzelnen Beispiels zum Beispiel selbst. Umgekehrt kann man auch zu jeder Struktur u eine Abstraktion bilden, die genau u als Beispiel hat, etwa durch

$$\lceil x \text{ mit } x = u \rfloor$$

was man mit $\uparrow u$ bezeichnen könnte. Dann wäre $\uparrow\downarrow A = A$ und $\downarrow\uparrow u = u$.

Wenden wir die neuen Sprachelemente auf unser Beispiel an, dann können wir bisher sagen

$$\downarrow\text{Rätsellösung} = [15, 6]$$

obwohl uns in dieser Situation die Aussage Rätsellösung $= [15, 6]$ auch richtig und sicherlich vertrauter erschienen wäre. Um eine Antwort auf die Frage Rätsellösung $= [15, 6]$? zu finden, müssen wir prinzipiell die Gleichheit zweier Strukturen A, B überprüfen, was gemäß unserer Vereinbarung durch Nachweis der beiden Spezialisierungen $A :: B$ und $B :: A$ geschieht. Wir müssen also zeigen, dass jede Rätsellösung ein Beispiel von $[15, 6]$ und jedes Beispiel von $[15, 6]$ eine Rätsellösung ist. Dazu müssen wir aber erst einmal die Beispiele von $[15, 6]$ kennen!

Allgemein sind die Beispiele einer Liste $[C, D, E]$ nichts anderes als Listen von Beispielen zu den angegebenen Strukturen. Präziser formuliert ist X genau dann ein Beispiel für $[C, D, E]$, wenn $X = [u, v, w]$ gilt mit $u : C$, $v : D$, $w : E$.

Angewendet auf unsere Situation gilt $X : [15, 6]$ genau dann, wenn $X = [u, v]$ mit $u : 15$ und $v : 6$. Die Suche nach Beispielen von $[15, 6]$ verschiebt sich also nur auf die etwas seltsam klingende Frage nach Beispielen von 15 und 6.

Da 15 und 6 Beispiele der Abstraktion Zahl sind, kann eine Antwort auf diese Frage nur in der Formulierung dieser Abstraktion zu finden sein. Leider haben wir aber durch den Verweis auf die allgemeine Vertrautheit mit Zahlen diese Präzisierung übersprungen, so dass wir jetzt nicht einfach zurückblättern können, um das Modell Zahl genauer unter die Lupe zu nehmen.

Tatsächlich werden wir die Abstraktion *reellesZahlenkontinuum* erst dann sauber angeben können, wenn wir das Modell *Mengenlehre* eingeführt haben, um damit von einer *Menge* $\mathbb{R}$ und ihren *Elementen* den reellen Zahlen überhaupt erst sprechen zu können. Soviel sei aber hier schon zur Mengenlehre gesagt: die Mengenlehre ist ein Modell für das Zusammenfassen, Sortieren und Ordnen von Dingen. Die Dinge, die in der Mengenlehre sortiert, zusammengefasst und geordnet werden, sind sogenannten*Objekte*. Sie sind selbst so grundlegend, wie konkrete Dinge in unserer Welt zu denen es wegen ihrer Einzigartigkeit keine weiteren Beispiele gibt (etwa ein konkreter Apfel mit seinem ganz speziellen Farbverlauf, seiner im Detail einzigartigen Form, seiner ganz speziellen Platzeinnahme im Raum usw.). Für ein Objekt gibt es also kein anderes Beispiel als es selbst, was wir mit unserer Sprache so ausdrücken können

$$x : \text{Objekt} :\Leftrightarrow x = (\downarrow x) \;\square$$

Da Zahlen in der Menge $\mathbb{R}$ zusammengefasst sind, handelt es sich bei ihnen nach den Regeln der Mengenlehre also um Objekte und als solche sind sie selbst ihr einziges Beispiel, d.h. $6 : (\downarrow 6)$ und $15 : (\downarrow 15)$. Damit gilt aber auch $[15, 6] : (\downarrow [15, 6])$, wodurch das Geheimnis um die Beispiele von $[15, 6]$ gelüftet ist und wir mit dem Gleichheitsbeweis fortfahren können: ist X ein beliebiges Beispiel von Rätsellösung, dann wissen wir wegen unseres Eindeutigkeitsnachweises, dass $X = [15, 6]$ gilt und damit X auch ein Beispiel von $[15, 6]$ ist. Umgekehrt ist ein Beispiel von $[15, 6]$ zwangsläufig die Liste $[15, 6]$, die wegen unseres Existenznachweises auch ein Beispiel von Rätsellösung ist. Es gilt also tatsächlich das rundum zufriedenstellende Ergebnis

$$\text{Rätsellösung} = [15, 6]$$

1.4. Mehrwertsteuer zurück

> Zu einem Geschäftsjubiläum sollen die Kunden durch einen speziellen Preisnachlass angelockt werden, wobei die Preise so reduziert werden, dass der ursprüngliche Mehrwertsteuerbetrag erlassen wird. Um wieviel Prozent müssen die Preise dazu gesenkt werden?

Bei der Umsetzung der Geschichte in mathematische Strukturen muss zunächst das Konzept der Mehrwertsteuer präzise beschrieben werden. Die Formulierung der Bedingung an den Rabattsatz ist dann leicht möglich. Wir holen deshalb etwas weiter aus und beginnen mit einem Kontext in dem der Mehrwertsteuersatz m als eine Zahl in $[0, 1]$ (also als ein *Anteil*) zur Verfügung steht und durch seine Auswirkung auf den Bruttopreis eines Produkts genauer beschrieben wird. Da es steuerlich gesehen nur um die Preise geht, abstrahieren wir von allen anderen möglichen Eigenschaften eines Produkts.

Steuersituation := $\lceil m$ **mit**
· Mehrwertsteuersatz
m : Anteil,

· Produktbeschreibung
Produkt := $\lceil N$ **mit**
· Nettopreis
N : Zahl, $N > 0$,
· Mehrwertsteueranteil
$M := m \cdot N$,
· Bruttopreis
$B := N + M\rfloor$,

Rabatt := $\lceil q$ **mit**
q : Anteil,
In Produkt **gilt** $q \cdot B = M\rfloor\rfloor$

Die Bedingung an den gesuchten Rabatt q wird dadurch formuliert, dass für jedes Produkt der Preisnachlass $q \cdot B$ auf den Bruttopreis genau dem Mehrwertsteueranteil M entspricht.

Das in diesem Beispiel benutzte Konstruktionsprinzip, innerhalb eines Kontextes weitere Kontexte formulieren zu können, illustriert die Möglichkeit des hierarchischen Aufbaus mathematischer Strukturen, die aus anderen Strukturen gebildet sein können, die wiederum aus anderen Strukturen gebildet sind usw. Um in einer solchen Hierarchie die Komponenten eindeutig ansprechen zu können, benutzen wir globale Identifikationen durch Verketten der Teilenamen. Hat eine Struktur A Strukturen mit Namen B und C die wiederum jeweils eine Struktur mit Namen D haben, dann ist eine eindeutige Identifikation der Substrukturen durch $A.B$, $A.B.D$, $A.C$, $A.C.D$ usw. gegeben.

So lässt sich in unserem Beispiel mit den üblichen Rechenregeln ein Satz im Kontext Steuersituation.Rabatt beweisen

In Steuersituation.Rabatt **gilt** $q = \frac{m}{1+m}$

Dies zeigt uns, dass wir zum Finden eines Rabattbeispiels höchstens eine Möglichkeit haben und tatsächlich ergibt die Probe

In Steuersituation **gilt** $\frac{m}{1+m}$: Rabatt

so dass Rabatt genau ein Beispiel hat. Wie im vorangegangenen Abschnitt ergibt sich insgesamt die umfassende Antwort

In Steuersituation **gilt** Rabatt $= \frac{m}{1+m}$

Um dieses Ergebnis auf einen konkreten Mehrwertsteuersatz, von sagen wir 19%, anzuwenden , ist der zugehörige Rabatt also $19\%/(119\%) \approx 16\%$.

Die oben benutzte Zusammensetzung Steuersituation.Rabatt von Kontextnamen tritt übrigens auch in der natürlichen Sprache auf z.B. in Wörtern wie Fahrradreifen, Fahrradklingel, Fahrradsattelfederung, etc.

Sehr lange Wortketten sind dabei offensichtlich unpraktisch. Sie zu umgehen, erreicht man durch die Wahl eines Kontextes: Wenn man über ein Fahrrad spricht, muss man nicht Fahrradsattelfederung sagen, sondern es genügt, sich auf die Sattelfederung zu beziehen. Im Fahrradkontext wird nämlich implizit vorausgesetzt, dass Sattel für Fahrradsattel steht und nicht für den Sattel eines Pferdes oder gar für eine geologischen Formation in den Bergen.

Begeben wir uns mit der Angabe

In Steuersituation

in den Kontext Steuersituation, dann bezieht sich der Name *Produkt* entsprechend auf den dort vereinbarten Kontext und nicht auf eine Struktur, die mit gleichem Namen in einer darüberliegenden Hierarchiestufe definiert wurde.

Beim Abstieg innerhalb der Hierarchie bleiben Namen damit nur solange sichtbar, wie sie nicht durch lokale Namen verdeckt werden. Ein Rückgriff auf verdeckte Namen ist aber mit der globalen Identifikation stets möglich.

1.5. Ein magisches Papierformat

Als nächstes Beispiel betrachten wir folgende Frage:

> Gibt es ein Papierformat, das nach dem Falten in der Mitte der längeren Seite das ursprüngliche Seitenverhältnis beibehält?

Zur konsequenten Umsetzung der Fragestellung ist es sinnvoll, die entscheidenden Begriffe mathematisch streng zu fassen und sie dann mit den sprachlichen Möglichkeiten der Modellierungssprache entsprechend der Vorgaben zu verknüpfen.

Im vorliegenden Fall ist es sinnvoll zunächst eine Abstraktion von einem Blatt Papier zu bilden, die darauf zugeschnitten ist, dass uns nur die Seitenlängen des Papiers interessieren. Das Blatt reduziert sich damit auf ein Paar von positiven Zahlen

$$\boxed{[a, b] : \text{Blatt} :\Leftrightarrow a : \text{Zahl},\ b : \text{Zahl},\ a > 0, b > 0\ \square}$$

Im nächsten Schritt soll die längere Seite x eines Blatts $[a, b]$ ermittelt werden, wobei diese im Fall $a \geq b$ durch $x = a$ und im Fall $a < b$ durch $x = b$ bestimmt ist. Ein *Fall* ist dabei nichts anderes als eine Situationsbeschreibung, die sich allein auf bereits vorhandene Strukturen bezieht und entspricht damit letztlich einer Abstraktion ohne Platzhalter. Statt $\lceil$ mit $a \geq b, x = a\rfloor$ benutzen wir aber die intuitivere Form

$$\text{Fall}(a \geq b, x = a)$$

bei der die leere Platzhalterliste und das Schlüsselwort **mit** unterdrückt wird. Wenn alle Aussagen in einer Fallbeschreibung wahr sind, dann sagen wir, der Fall *liegt vor* oder *ist wahr*. Insgesamt kann damit ein Fall selbst als eine Aussage betrachtet werden.

Die längere Seite x eines Blatts $[a, b]$ ist also charakterisiert durch die Eigenschaft, dass Fall$(a \geq b, x = a)$ *oder* Fall$(a < b, x = b)$ vorliegt. Solch eine oder-Kombination von Aussagen E, F liefert als Ergebnis wieder eine Aussage, die wir mit $E \vee F$ bezeichnen.

Notieren wir die Überlegungen in Form einer Abstraktion, so ergibt sich

$$\lceil x \text{ mit } \text{Fall}(a \geq b, x = a) \vee \text{Fall}(a < b, x = b)\rfloor$$

Zu beachten ist, dass diese Beschreibung von den Seitenlängen a, b abhängt und daher für ein konkrete Blatt erst durch Einsetzen der entsprechenden Seitenlängen seine tatsächliche Form annnimmt.

Solche Definitionen, bei denen eine Beschreibung von einem noch nicht endgültig fixierten Parameter abhängt, nennen wir eine *Zuordnung*. Typischerweise können Zuordnungen nur auf Parametern mit gewissen Eigenschaften operieren. So ist in unserem Fall eine natürliche Einschränkung, dass wir längere Seiten nur von Blättern bestimmen wollen. Dieser Parameterkontext wird bei der Definition in folgender Form mit angegeben

$$\boxed{\begin{aligned}&\text{längereSeite}(a, b \text{ mit } [a, b] : \text{Blatt}) := \\ &\qquad\qquad\lceil x \textbf{ mit } \text{Fall}(a \geq b, x = a) \vee \text{Fall}(a < b, x = b)\rfloor\end{aligned}}$$

Die Klammer im Namen liest man in diesem Fall als *von* aber es sind auch andere Präpositionen denkbar. Nimmt man die entsprechende Präposition in den Namn mit auf (etwa längereSeiteVon), dann würde die Klammer gar nicht gelesen.

Für das konkrete Blatt $[1, 2]$ ist nun

$$\text{längereSeite}([1, 2]) = \lceil x \text{ mit } \text{Fall}(1 \geq 2, x = 1) \vee \text{Fall}(1 < 2, x = 2)\rfloor$$

wobei diese Abstraktion wiederum gleichbedeutend mit 2 ist. Entsprechend wäre

$$\text{längereSeite}([5, 3]) = \lceil x \text{ mit } \text{Fall}(5 \geq 3, x = 5) \vee \text{Fall}(5 < 3, x = 3)\rfloor$$

was gleichbedeutend mit 5 ist.

Die Definition der kürzeren Seite verläuft natürlich analog, aber wir können das Beispiel nutzen, um eine intuitivere Form der Definition vorzustellen. Während sich die obige Definition der längeren Seite folgendermaßen liest: *längere Seite von a, b, mit $[a, b]$ ist ein Blatt, ist definiert als eine Abstraktion bestehend aus x mit ...*, klingt es beim Lesen besser, die in diesem Fall etwas sperrige Passage *ist eine Abstraktion bestehend aus x mit* in bekannter Weise zu umgehen, d.h.

$$\boxed{\begin{array}{l} x : \text{kürzereSeite}(a, b \text{ mit } [a, b] : \text{Blatt}) :\Leftrightarrow \\ \hfill \text{Fall}(a \geq b, x = b) \vee \text{Fall}(a < b, x = a) \ \Box \end{array}}$$

Diese äquivalente Form der Definition liest sich (mit einer weiteren kleinen sprachlichen Glättung in der Argumentklammer) so: *x ist eine kürzere Seite vom Blatt $[a, b]$ definitionsgemäß genau dann, wenn ...*

Das Seitenverhältnis eines Blatts ist nun gegeben durch

$$\boxed{\text{Seitenverhältnis}(B \text{ mit } B : \text{Blatt}) := \frac{\text{längereSeite}(B)}{\text{kürzere Seite}(B)}}$$

Zur sprachlichen Umsetzung der gesamten Problemstellung fehlt jetzt noch die Präzisierung des Faltens entlang der längeren Seite. Ein solcher Prozess lässt sich ebenfalls elegant durch eine Zuordnung beschreiben, wobei der Zuordnungsparameter die Situation *vor* und das Zuordnungsergebnis die Situation *nach* Ablaufen des Prozesses beschreibt. Hier wäre dies

$$\boxed{\text{Halbierung}(B \text{ mit } B : \text{Blatt}) := [\ \text{längereSeite}(B)/2, \text{kürzere Seite}(B)]}$$

Die eigentliche Bedingung an das magisches Papierformat ist nach Präzisierung aller Einzelbegriffe offensichtlich

$$\boxed{\begin{array}{l} B : \text{magischesFormat} :\Leftrightarrow B : \text{Blatt}, \\ \hfill \text{Seitenverhältnis}(B) = \text{Seitenverhältnis}(\text{Halbierung}(B)) \ \Box \end{array}}$$

und die Problemstellung lässt sich als Frage etwa so angeben

$$\boxed{\exists \text{magischesFormat?}}$$

Durch Argumentationen mit Rechenregeln kann man zunächst den folgenden Satz beweisen

In magischesFormat **gilt** Seitenverhältnis$(B) = \sqrt{2}$

Das Ergebnis legt nahe, die Struktur

Wurzel2Format := $\lceil B$ **mit** B : Blatt, Seitenverhältnis$(B) = \sqrt{2}\rfloor$

einzuführen. Das bisherige Ergebnis kann dann auch als

magischesFormat :: Wurzel2Format

geschrieben werden (lies: *jedes magische Format ist ein Wurzel2Format*). Die Proberechnung zeigt auch umgekehrt

Wurzel2Format :: magischesFormat

und damit insgesamt magischesFormat = Wurzel2Format.

Da es sehr einfach ist, Beispiele von Wurzel2Format zu finden (z.B. $[\sqrt{2}, 1]$, $[2\sqrt{2}, 2]$, $[3\sqrt{2}, 3]$ etc.) und diese genau die Beispiele des magischen Formats beschreiben, haben wir eine umfassende Antwort auf unsere Fragestellung erhalten.

1.6. Wer fährt welchen Wagen?

Die folgende logische Spielerei wird uns das Konzept der logischen Verknüpfungen verdeutlichen.

In einem Parkhaus stehen drei Autos von Anton, Bernhard und Carlo, wobei Farben und Wertigkeit jeweils verschieden sind. Es gibt jeweils ein Fahrzeug der Unter-, Mittel- und Oberklasse und die Farben sind rot, grün und blau. Aber wie ist die genaue Zuordnung? Folgendes ist bekannt:

- Das rote Auto hat nicht die niedrigste und das blaue nicht die höchste Klasse.
- Bernhards Auto ist kein Oberklassefahrzeug.
- Carlo besitzt nicht das grüne und Bernhard nicht das blaue Auto.
- Antons Wagen ist eine Klasse niedriger als der von Carlo.

Um diese etwas umfangreichere Situation als Modell abzubilden, benötigen wir mehrere Ausgangsstrukturen. Da zunächst nicht bekannt ist, wie Wagenbesitzer, Wagenfarben und Wagenklassen miteinander zusammenhängen, führen wir insgesamt Platzhaltrer für neun Autos ein

Parkhaus := ⌈ AntonsAuto, BernhardsAuto, CarlosAuto, rotesAuto, grünesAuto, blauesAuto, Unterklasse, Mittelklasse, Oberklasse **mit**

Das Ziel wird dann am Ende sein, im Kontext Parkhaus Eigenschaften wie AntonsAuto = grünesAuto oder grünesAuto = Mittelklasse abzuleiten.

Zur Verfügung steht dazu die im Text angegebene Ausgangssituation. Um etwa die Bedingung *Das rote Auto hat nicht die niedrigste Klasse* umzusetzen, benötigen wir die gegenteilige Aussage zu rotesAuto = Unterklasse. Hierfür steht in der Modellierungssprache eine Zuordnung zur Verfügung, die zu jeder Aussage E die gegenteilige Aussage Negation(E) bildet. Das Ergebnis der Zuordnung ist dabei einerseits durch den Zuordnungsnamen *Negation* und andererseits durch die beteiligte Eigenschaft E (das Argument der Zuordnung) gekennzeichnet. Dieses Prinzip ist aus der Umgangssprache wohlbekannt, wo auch die Ergebnisse einer Verknüpfung durch die Namen der beteiligten Dinge und einen Hinweis auf die Art der

Verknüpfung gekennzeichnet werden (zum Beispiel bei Haferflocken, Apfelmuß oder Erdbeerrhabarbermarmelade).

Für häufig auftretende Zuordnungen wie die Negation werden üblicherweise Abkürzungssymbole eingeführt, die oft klammerfrei mit dem Argument kombiniert werden. So schreiben wir statt Negation(E) auch einfach $\neg E$ (lies *nicht* E). Für die Vereinbarung solcher Abkürzungen werden wir

Notation $\neg \boxed{E}$ **für** Negation(E)

schreiben, wobei links die Abkürzung mit eingerahmten Platzhalternahmen steht, gefolgt von dem aussführlichen Ausdruck. Auch die bisher bereits eingeführten Symbole $:, \exists, ::, =$ sind dabei Notationen im obigen Sinne.

Um Missverständnisse bei einer Kombination von Kurzschreibweisen zu vermeiden, dürfen wir z.B. nicht einfach $\neg A = B$ schreiben, denn dies könnte sowohl für die gegenteilige Aussage zu $A = B$ oder aber für die Gleichheit vonn $\neg A$ und B stehen. Klarheit darüber, wodurch genau der Platzhalter E in der Negations-Notation zu ersetzen ist, schaffen wir traditionell mit runden Klammern, d.h. wir schreiben $\neg(A = B)$. Da wir viel mit dieser Kombination von Negation und Gleichheit in unserer Geschichte zu tun haben, lohnt es sich, auch hierfür eine suggestive Abkürzung einzuführen. Mit

Notation $\boxed{A} \neq \boxed{B}$ **für** $\neg(A = B)$

können die meisten Bedingungen unserer Geschichte kompakt formuliert werden.

rotesAuto $\neq$ Unterklasse
blauesAuto $\neq$ Oberklasse
BernhardsAuto $\neq$ Oberklasse
CarlosAuto $\neq$ grünesAuto
BernhardsAuto $\neq$ blauesAuto

Zur Umsetzung der letzten Bedingung in der Liste, benötigen wir weitere logische Zuordnungen. Da Antons Wagen eine Klasse niedriger als der von

Carlo ist, gibt es hier zwei mögliche Situationen, nämlich dass Carlo einen Oberklasse- *und* Anton einen Mittelklassewagen hat, *oder* dass der Mittelklassewagen Carlo gehört *und* Anton einen Unterklassewagen besitzt. Erforderlich sind hier die *und*-Verknüpfung (sog. Konjunktion) sowie die *oder*-Verknüpfung (sog. Disjunktion) von Eigenschaften, für die wir die klassischen Kürzel nutzen

Notation $\boxed{E}\wedge\boxed{F}$ **für** Konjunktion($[E, F]$)
Notation $\boxed{E}\vee\boxed{F}$ **für** Disjunktion($[E, F]$)

Die letzte Bedingung hat damit die Form

$$\Big((\text{CarlosAuto} = \text{Oberklasse})\wedge(\text{AntonsAuto} = \text{Mittelklasse})\Big)$$
$$\vee\Big((\text{CarlosAuto} = \text{Mittelklasse})\wedge(\text{AntonsAuto} = \text{Unterklasse})\Big)$$

Versucht man, ausgehend von den bisherigen Voraussetzungen, weitere Eigenschaften abzuleiten, so stellt man schnell fest, dass noch Informationen fehlen, die wir durch die Konstruktion der Geschichte implizit annehmen. Zum einen ist dies die Verschiedenheit der Fahrzeuge innerhalb der drei Gruppen, also zum Beispiel dass rotes Auto nicht identisch mit blauesAuto ist. Außerdem ist noch wichtig, dass die drei Gruppen untereinander dennoch identisch sind, d.h. BernhardsAuto muss einem Fahrzeug mit Farbangabe und einem Fahrzeug mit Klassenangabe entsprechen.

Um diese Eigenschaften knapp zu formulieren, führen wir zunächst die drei Gruppeneinteilungen als Listen ein.

Farbsortierung := [rotesAuto, grünesAuto, blauesAuto],
Besitzersortierung := [AntonsAuto, BernhardsAuto, CarlosAuto],
Klassensortierung := [Unterklasse, Mittelklasse, Oberklasse],

Die Verschiedenheit innerhalb einer Sortierung ist nun durch drei Ungleichungen beschreibbar, die wir in einer Struktur kodieren

$[x, y, z]$: paarweiseVerschieden $:\Leftrightarrow x \neq y, x \neq z, y \neq z \; \square$,
Farbsortierung : paarweiseVerschieden,
Besitzersortierung : paarweiseVerschieden,
Klassensortierung : paarweiseVerschieden,

Um schließlich auszudrücken, dass die Sortierungen untereinander jeweils die gleichen Fahrzeuge repräsentieren, können wir nicht einfach Farbsortierung = Besitzersortierung schreiben, da wir damit bereits die Gleichheit der Listeneinträge erzwingen würden, deren Reihenfolge aber rein willkürlich war und deshalb nichts mit dem eigentlichen Ergebnis zu tun haben muss.

Die Befreiung von der willkürlichen Reihenfolge kann man mit Strukturen erreichen, die den jeweiligen Listeninhalt ohne den Aspekt der Reihenfolge darstellen, also z.B.

$$\boxed{\lceil A \textbf{ mit } ((A = \text{rotesAuto}) \vee (A = \text{grünesAuto})) \vee (A = \text{blauesAuto}) \rfloor}$$

bzw.

$$\boxed{\lceil A \textbf{ mit } ((A = \text{Unterklasse}) \vee (A = \text{Mittelklasse})) \vee (A = \text{Oberklasse}) \rfloor}$$

Da für die Besitzersortierung offensichtlich eine weitere Anwendung der gleichen Idee nötig wäre, folgen wir lieber dem Prinzip, bei Wiederholungen des gleichen Musters, dieses getrennt von seinen Anwendungen zu formulieren (dadurch wird die Dartsellung klarer und kürzer). In allen Fällen wollen wir aus einer Liste mit drei Einträgen einen Kontext bilden, bei dem die drei vorgegebenen Listeneinträge in einer bestimmten *oder*-Verknüpfung auftauchen. Wir schreiben diese Zuordnung so

$$\boxed{A : \text{ungeordnet}(x, y, z \text{ mit}) :\Leftrightarrow ((A = x) \vee (A = y)) \vee (A = z) \; \square}$$

wobei wir keine Bedingungen an x, y, z stellen, was zu der leeren Liste von Aussagen hinter dem Schlüsselwort **mit** führt.

Da die Einträge der Liste Farbsortierung genau die Beispiele der Struktur ungeordnet(Farbsortierung) sind, können wir nun unser Modell einfach abschließen

ungeordnet(Farbsortierung) = ungeordnet(Besitzersortierung), ungeordnet(Farbsortierung) = ungeordnet(Klassensortierung)$\rfloor$

Die Lösung des Rätsels hat die prinzipielle Form

In Parkhaus **gilt**
([AntonsAuto,BernhardsAuto,CarlosAuto]=...)
$\wedge$ ([AntonsAuto,BernhardsAuto,CarlosAuto]=...)

wobei anstelle der Pünktchen die korrekt sortierten Farben bzw. Klassen stehen. Details werden aber nicht verraten.

1.7. Was ist eine Funktion?

In den vorangegangenen Beispielen haben wir das Konzept der Zuordnung kennengelernt. Wir haben gesehen, dass die Bausteine einer Zuordnung ein *Parameterkontext* K und eine *Ergebnisbeschreibung* B sind, wobei B in K formulierbar sein muss. Das Symbol für die Zuordnung, die aus diesen beiden Zutaten besteht ist $K \mapsto B$ (lies *eine Zuordnung von* K *auf* B). Mit einer Definition, können wir einen abkürzenden Namen vergeben, etwa

$F := K \mapsto B$

was sich so liest: F *ist definiert als eine Zuordnung von* K *auf* B. Wird K explizit angegeben durch $\lceil P$ mit $E\rfloor$, dann haben wir die äquivalente aber lesefreundlichere Variante

$F(P \text{ mit } E) := B$

bereits kennengelernt. Egal, welche Form wir bei der Definition wählen, wird nach der Definition die Aussage

F : Zuordnung

wahr sein und wir können mit zulässigFür(F) auf den Parameterkontext K von F zugreifen und für jedes x, welches die Bedingung x : zulässigFür(F) erfüllt, haben wir durch $F(x)$ Zugriff auf das Ergebnis, das nach Ersetzen der Parameterplatzhalter durch x in der Beschreibung B entsteht.

Für Zuordnungen gibt es einige wichtige abgeleitete Begriffe. So ist es oft wichtig zu wissen, ob ein konkretes y das Ergebnis einer Zuordnung F ist, d.h. ob es ein zugehöriges x gibt mit $y = F(x)$. Wir definieren deshalb

$$\boxed{\begin{array}{l} y : \text{Ergebnis}(F \textbf{ mit } F : \text{Zuordnung}) :\Leftrightarrow \exists \lceil x \textbf{ mit } y = F(x) \rfloor \ \square, \\ \textbf{Notation } \boxed{F}(\ldots) \textbf{ für } \text{Ergebnis}(F) \end{array}}$$

Eine wichtige Rolle in der Mathematik spielen solche Zuordnungen, die eine 1-zu-1 Beziehung zwischen Argumenten und Ergebnissen herstellen, sogenannte *injektive* Zuordnungen. Wir definieren

$$\boxed{F : \text{injektiv} :\Leftrightarrow F : \text{Zuordnung}, \forall u, v \textbf{ mit } F(u) = F(v) \textbf{ gilt } u = v \ \square}$$

Zu jeder injektiven Zuordnung kann man offensichtlich eine umgedrehte Variante definieren, die den Ergebnissen ihre eindeutig bestimmten Argumente zuordnet.

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{InverseZu}(F \textbf{ mit } F : \text{injektiv}) := \\ \qquad\qquad \lceil y \textbf{ mit } y : F(\ldots) \rfloor \mapsto \downarrow \lceil x \textbf{ mit } y = F(x) \rfloor \end{array}}$$

Wie grundlegend diese Begriffe rund um das Konzept der Zuordnung sind, zeigt sich daran, dass ein Modell der Mengenlehre, mit dem dann alle üblichen Konzepte der Mathematik notiert werden können, auf einer einzigen injektiven Zuordnung mit Namen *ElementVon* beruht.

Die Modellbeschreibung beginnt mit der Einführung der zentralen Begriffe *Menge* und *Element*

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Mengenlehre} := \lceil \text{ElementVon } \textbf{mit} \\ \text{ElementVon} : \text{Zuordnung}, \\ \text{Menge} := \text{zulässigFür}(\text{ElementVon}), \\ x : \text{Element} :\Leftrightarrow \exists M \text{ mit } x : \text{ElementVon}(M) \ \square, \end{array}}$$

Übliche Notationen an dieser Stelle sind

Notation $\boxed{x} \in \boxed{M}$ **für** x : ElementVon(M),
Notation $\boxed{A} \subset \boxed{B}$ **für** ElementVon(A)::ElementVon(B),

wobei $x \in M$ als x *ist ein Element von* M und $A \subset B$ als A *ist eine Teilmenge von* B ausgesprochen wird.

Weiter geht es mit der Information, dass ElementVon sogar eine injektive Abbildung ist,

ElementVon : injektiv,
Mengenbeschreibung := ElementVon($\ldots$),
MengeZu := InverseZu(ElementVon),

Die Axiome der Mengenlehre können nun dadurch formuliert werden, dass man Eigenschaften von*Mengenbeschreibung* präzisiert. Beispielsweise ist eine Forderung, dass jede Spezialisierung einer Mengenbeschreibung wieder eine Mengenbeschreibung ist,

$\forall\ Y, Z$ **mit** Y : Mengenbeschreibung, $Z :: Y$ **gilt** Z : Mengenbeschreibung

was auf sogenannte Aussonderungsmengen führt. Ähnlich ergibt sich das Konzept der Potenzmenge aus der Forderung

$\forall\ A$ **mit** A : Menge **gilt** $\lceil B$ **mit** $B \subset A\rfloor$: Mengenbeschreibung

Statt dem Modell der Mengenlehre weiter zu folgen (siehe Kapitel 4), wollen wir hier auf das Konzept der *Funktion* eingehen, dass eng mit dem Begriff der Zuordnung verbunden ist.

Bereits an der klassischen Notation einer Funktion f in der Form

$$f: \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & B \\ x & \mapsto & y \end{array}$$

können wir die wesentlichen Bausteine erkennen: eine Menge A, für deren Elemente x eine Zuordnung auf Elemente y einer Menge B gegeben ist. Ein mögliches Modell für den Funktionsbegriff ist deshalb

Funktion := $\lceil F, Z$ **mit** F : Zuordnung, Z : Menge, zulässigFür(F) : Mengenbeschreibung, D := MengeZu(zulässigFür(F)), $F(\ldots)$ :: ElementVon(W)$\rfloor$

Die Mengen D und Z in der Funktionsdefinition werden auch als Definitionsmenge und Zielmenge der Funktion bezeichnet. Um sie zugänglich zu machen, definieren wir die Notation

Notation $D_{\boxed{f}}$ **für** (Funktion $\mapsto D)(f)$, **Notation** $Z_{\boxed{f}}$ **für** (Funktion $\mapsto Z)(f)$

Schließlich möchten wir auch bei Funktionen f die Funktionsergebnisse mit $f(x)$ ansprechen können, wobei wir dabei f eigentlich auf die in f enthaltene Zuordnung reduzieren.

Solche Uminterpretationen von Beispielen einer bestimmten Abstraktion als Beispiele einer anderen Abstraktion finden beim Mathematikmachen sehr häufig statt: zum Beispiel wenn man einen Vektorraum als Gruppe, oder eine Gruppe als Menge interpretiert, oder einen normierten Raum als topologischen Raum etc. (auch im alltäglichen Leben hat man es sehr häufig mit Uminterpretationen zu tun: wenn man sich etwa mit einem Kugelschreiber den Rücken kratzt oder einen Hut zum Geldeinsammeln benutzt).

Inhaltlich sind Interpretationen eigentlich Zuordnungen, die jedem Beispiel einer Abstraktion A ein Beispiel einer Abstraktion B zuweisen. Wir notieren dies so

Interpretation Funktion **als** Zuordnung F

wobei die am Zeilenende angegebene Beschreibung der Interpretationsvorschrift (hier F) ein in der Abstraktion *Funktion* formuliertes Beispiel von *Zuordnung* sein muss.

Wird nun an einer Stelle, wo eine Zuordnung erwartet wird, eine Funktion eingesetzt, so sorgt die Interpretationsvorschrift dafür, dass tatsächlich die zur Funktion gehörige Zuordnung benutzt wird. Insbesondere steht nun $f(x)$ wie gewohnt für das Funktionsergebnis, sofern $x \in D_f$ erfüllt ist.

1.8. Ein optimales Rechteck

Unser nächstes Beispiel ist ein Optimierungsproblem.

> Gesucht ist ein Rechteck, das bei vorgegebenem Flächeninhalt einen möglichst kleinen Umfang hat.

Um diese Aufgabenstellung knapp formulieren zu können, ist es sinnvoll, zunächst eine Rechteckstruktur einzuführen. Wie beim magischen Papierformat werden wir Rechtecke durch die Längen ihrer beiden Seitenlängen beschreiben. Umfang und Inhalt kann man als Zuordnung auf Rechtecken betrachten. Wir beginnen mit

$[a, b]$: Rechteck $:\Leftrightarrow a$: Zahl, b : Zahl, $a > 0$, $b > 0$ $\Box$,
Umfang(a, b **mit** $[a, b]$: Rechteck) $:= 2 \cdot (a + b)$,
Inhalt(a, b **mit** $[a, b]$: Rechteck) $:= a \cdot b$,

Die Vorgabe, unter der das optimale Rechteck gesucht wird, erlaubt uns die möglichen Kandidaten für die Minimumsuche zu formulieren:

Vorgabe $:= \lceil A$ **mit**
$\cdot$ Flächeninhalt
A : Zahl, $A > 0$,
S : Kandidat $:\Leftrightarrow S$: Rechteck, Inhalt(S) $= A$ $\Box\rfloor$

Die Abstraktion des optimalen Rechtecks zu einer Vorgabe ist dann durch folgende Zuordnung gegeben

R : optimalesRechteckZu(A **mit** A : Vorgabe) $:\Leftrightarrow$ R : Kandidat,
$\forall S$ **mit** S : Kandidat **gilt** Umfang(R)$\leq$ Umfang(S) $\square$

und die eigentliche Problemstellung ist

In Vorgabe **gilt** $\exists!$optimalesRechteckZu(A)?

Um ein Gefühl für die Lösung zu bekommen, stellen wir uns eine große Gruppe Kaiserpinguine am Südpol vor, die in der Polarnacht zusammengedrängt den kalten Stürmen trotzen müssen. Da jeder der Pinguine möglichst von anderen Pinguinen umgeben sein will, um es von allen Seiten wärmer zu haben, wird sich die Formation automatisch so einstellen, dass möglichst wenige Pinguine am Außenrand sind, wo sie zwangsläufig eine freie Seite haben. Von oben gesehen wird der Umfang also möglichst kurz, wobei die Fläche der Formation durch die Anzahl der dicht stehenden Pinguine festgelegt ist. Die Pinguine lösen also ein verwandtes Optimierungsproblem und wir können uns ihre Lösung anschauen. Dabei sagt uns schon unser eigenes Gefühl, dass die Formation mit Sicherheit nicht langgestreckt sondern eher rund sein wird.

Da das rundeste Rechteck das Quadrat ist, stellen wir die Hypothese auf, dass das Quadrat unser gesuchtes optimales Rechteck ist. Mit dem Konzept des Quadrats

$[a, b]$: Quadrat $:\Leftrightarrow$ $[a, b]$: Rechteck, $a = b$ $\square$

entspricht diese Hypothese der Frage

In Vorgabe **gilt** optimalesRechteckZu(A) : Quadrat?

1.9. Zusammenfassung der Sprachelemente

Insgesamt enthält unsere Modellierungssprache nur wenige grundlegende Sprachelemente, sowie einige nützliche Ersatznotationen, die intuitive Formulierungen erlauben. In diesem Abschnitt sollen die Konstrukte nocheinmal zusammengefasst werden. Der Schwerpunkt liegt dabei zunächst nur auf der äußerlichen Form. Ob eine konkrete Formulierung zulässig ist, hängt von weiteren Bedingungen ab, die sich aus dem bereits formulierten Text ergeben. Zum Beispiel darf man einer Zeichenkette in einer Definition nur dann eine Bedeutung zuordnen, wenn sie nicht bereits vorher benutzt wurde. Umgekehrt dürfen nur definierte Zeichenketten in Ausdrücken verwendet werden. Solche zustandsabhängigen Regeln werden im Kapitel 2 genauer eingeführt.

Sprachliche Grundformen

In der folgenden Auflistung sind die Grundbegriffe zum Sprechen über die Sprache jeweils kursiv dargestellt. Daneben gibt es eine kurze Erläuterung und konkrete Beispiele. Die Zeichenketten bla, blupp dienen als Platzhalter für Begriffe der Sprache. Schlüsselwörter sind fett gedruckt.

Zeichenkette	ein einzelnes Zeichen (nicht das Leerzeichen und kein Sonderzeichen der Sprache wie $=, \exists, :, \ldots$) oder eine Kette solcher Zeichen ohne Zwischenraum, ohne Hoch- oder Niedrigstellung und ohne Akzente. Beispiele sind reelleFunktion, γ oder $\aleph$.
*Sequenz(*bla*)*	kommagetrennte Aneinanderreihung von bla (kann auch einzelnes bla sein oder die leere Sequenz). Beispiel für *Sequenz(Zeichenkette)* ist a, b, c.
bla | blupp	Die Aussprache für | ist *oder*.

Da die Grundbegriffe eng miteinander verknüpft sind, können sie nicht der Reihe nach eingeführt werden, d.h. Vorgriffe auf später erläuterte Begriffe sind unvermeidlich. Wir beginnen mit dem Konzept der Definition.

Definition	*Zeichenkette* := *Beschreibung*. Beispiele für Definitionen sind Folge := $\lceil a$ mit $a \in \mathcal{F}(\mathbb{N},\mathbb{R})\rfloor$ oder $\beta := \arcsin(\pi/3)$. Die Aussprache für := ist *ist definiert als*.
Beschreibung	*Abstraktion* | *Aussage* | *Zuordnung* | *Zuordnungsergebnis* | *Zeichenkette* | *Liste*. Beispiele zu den einzelnen Möglichkeiten werden im Folgenden vorgestellt.
Liste	[*Sequenz(Beschreibung)*]. Listenbeispiele sind $[G, op]$ oder $[\mathbb{R},\mathbb{Q},\mathbb{Z}]$.

Zur Schaffung neuer Begriffe sind die Konzepte der *Abstraktion* und der *Zuordnung* ganz wesentlich. Mit Abstraktionen lassen sich Modellrahmen schaffen, in denen gewisse Strukturen mit spezifizierten Eigenschaften zur Verfügung stehen. Zuordnungen funktionieren wie variable Beschreibungen, die von angebbaren Parametern abhängen.

Abstraktion	$\lceil$ *Sequenz(Zeichenkette)* **mit** *Sequenz(Aussage* | *Definition* | *Notation* | *Interpretation)*$\rfloor$. Ein Beispiel für eine Abstraktion ist $\lceil a, b$ mit $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}, d := (a+b)/2, d > 0\rfloor$. Die Aussprache für $\lceil$ ist *eine Abstraktion bestehend aus*.
Zuordnung	*Abstraktion* $\mapsto$ *Beschreibung*. Beispiel für eine Zuordnung ist $\lceil M$ mit M : Menge $\rfloor \mapsto M \cap \mathbb{R}$. Die Aussprache ist *Zuordnung von ... auf ...* .
Zuordnungsergebnis	*Zuordnung(Beschreibung)*. Beispiele für Zuordnungsergebnisse sind $F(x)$ oder $F((x+y)/2)$ oder auch $(\lceil x$ mit $x > 0\rfloor \mapsto 1/x)(2)$. Die Aussprache für (ist *von* oder *angewendet auf*.

Im speziellen Fall einer Abstraktion mit nur einem einzigen Beispiel lässt sich dieses folgendermaßen ansprechen.

Beispielextraktion	$\downarrow$*Abstraktion*. So ist $\downarrow \lceil x$ mit $x \in \mathbb{R}_{<0}, x^2 = 9\rfloor$ die reelle Zahl -3. Die Aussprache für $\downarrow$ ist *das Beispiel von*.

Zur Angabe von Eigenschaften werden *Aussagen* benutzt. Es gibt folgende Grundtypen von Aussagen.

Aussage	*Beschreibung* : *Abstraktion* | $\exists$ *Abstraktion* | **In** *Abstraktion* **gilt** *Aussage* | *Aussage* $\wedge$ *Aussage* | *Aussage* $\vee$ *Aussage* | $\neg$ *Aussage* .
	Beispiele für *ist*-Aussagen sind f : reelleFunktion oder auch $[1,2]$: $\lceil u, v$ mit $u > 0, v = u + 1\rfloor$. Dabei wird : als *ist ein Beispiel für* bzw. *ist ein(e)* ausgesprochen.
	Die Aussprache für $\exists$ lautet *es gibt ein Beispiel für* bzw. *es gibt ein(e)*. Beispielhafte Existenzaussagen sind $\exists$reelleFunktion, $\exists\lceil N$ mit $N \in \mathbb{N}, N \geq c\rfloor$.
	Als Beispiel für eine Satzaussage dient In $\lceil x, y$ mit $x > 0, y > x\rfloor$ gilt $y^2 > x^2$.
	Die Aussprache für $\wedge$ ist *und* zum Beispiel in $(x > 0) \wedge (y > 0)$.
	Die Aussprache für $\vee$ ist *oder* zum Beispiel in $(z \in \mathbb{N}) \vee (-z \in \mathbb{N})$.
	Die Aussprache für $\neg$ ist *nicht* zum Beispiel in $\neg(x \in \mathbb{R})$.

Fragen und Hypothesen lassen sich durch Nachstellen eines Fragezeichens hinter einer Aussage bescheiben.

Frage	*Aussage*?. So ist $x > 0$? die Frage, ob die Aussage $x > 0$ wahr ist. Die Aussprache lautet entsprechend *Ist ... wahr?*

Neben den hier vorgestellten sprachlichen Grundformen möchte man besonders für häufig benutzte Formulierungen auch knappere klammerarme und intuitive Notationen ermöglichen. Diese Notationsvereinbarungen folgen der Konvention

Notation	**Notation** <*Zeichenanordnung mit eingerahmten Platzhaltern*> **für** *Beschreibung*. Beispielsweise schreibt man bei einer Folge, einem Zahlentupel oder einer Matrix die Argumente gerne mit unteren Indizes statt in der Form eines Zuordnungsergebnisses. Eine entsprechende Vereinbarung wäre Notation $\boxed{a}_{\boxed{n}}$ für $a(n)$.

Schließlich lassen sich Beispiele gewisser Abstraktionen unter Umständen auch als Beispiele anderer Abstraktionen interpretieren, wie etwa ein Vektorraum V als Menge interpretiert werden kann, so dass $x \in V$ eine gültige Schreibweise ist.

Interpretation	**Interpretation** *Abstraktion Zeichenkette* **als** *Abstraktion Beschreibung*. Eine entsprechende Vereinbarung wäre Interpretation Vektorraum V als Menge X_V.

Alternativen zu Grundformen

Zur besseren Lesbarkeit und zur Vermeidung von unnötig vielen Klammern, werden zu den Grundformen in bestimmten Situationen auch andere Schreibweisen eingeführt. Um den Zusammenhang zwischen Grund- und Alternativform zu beschreiben, geben wir jeweils beide Versionen an, wobei wir kursiv geschriebene Platzhalter für Sprachobjekte benutzen.

Wir beginnen mit alternativen Definitionsformen im Fall von Abstraktionen. Hat die Abstraktion einen einzelnen Platzhalter, so können wir schreiben

X : *Name* :⇔ *Abstraktionsbeschreibung* □
Aussprache(:⇔) *definitionsgemäß genau dann, wenn*
Beispiel a : Folge :⇔ $a \in \mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ □
Grundform *Name* := $\lceil X$ mit *Abstraktionsbeschreibung*$\rfloor$

Umfasst die Abstraktion mehrere Platzhalter, dann ist die Form entsprechend

$[X, \ldots, Y]$: *Name* $:\Leftrightarrow$ *Abstraktionsbeschreibung* $\Box$
Beispiel $[A, B]$: Inklusionspaar $:\Leftrightarrow A$: Menge, B : Menge, $A \subset B$ $\Box$
Grundform *Name* $:= \lceil X, \ldots, Y$ mit *Abstraktionsbeschreibung*$\rfloor$

Bei der Definition einer Zuordnung, ist folgende Schreibweise suggestiver als die Grundform

Name(*Platzhalter* mit *Bedingungen*) := *Ergebnis*
Aussprache(() *zu*
Beispiel Mittelwert(a, b mit $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$) $:= (a + b)/2$
Grundform *Name* $:= \lceil$ *Platzhalter* mit *Bedingungen*$\rfloor \mapsto$ *Ergebnis*

Ist das Ergebnis wieder eine Abstraktion, so kann man die Formen kombinieren, wie in folgendem Beispiel

w : Wurzel(x mit $x \in \mathbb{R}$)$:\Leftrightarrow w \in \mathbb{R}, w^2 = x$ $\Box$

Da Abstraktionen ohne Platzhalter eine Situation beschreiben, die sich nur auf bereits vorhandene Abstraktionen bezieht, ist es naheliegend, folgende Alternativnotation zu wählen. Im Beispiel ist x als reelle Zahl bereits eingeführt worden.

Fall(*Bedingungen*)
Beispiel Fall($x > 0$, $\ln(x) = x$)
Grundform $\lceil$ mit *Bedingungen*$\rfloor$

Bei der Formulierung von Existenz- und Satzeigenschaften eignet sich die Grundform besonders dann, wenn die zugrundeliegende Abstraktion einen Namen hat. Allerdings ist eine solche Namensvergabe unnötig oder lästig, wenn die Abstraktion nur sehr selten verwendet wird, oder nicht unmittelbar mit einem eingängigen Wort verknüpft ist.

Im Fall der Existenzaussage benutzen wir eine Alternativnotation, bei der auf die führende Abstraktionsklammer verzichtet wird (die hintere Klammer ist als Endemarke unverzichtbar)

$\exists$*Platzhalter* mit *Bedingungen*$\rfloor$
Aussprache($\exists$) *es existiert ein(e)* bzw. *es existieren*
Beispiel $\exists N$ mit $N \in \mathbb{N}$, $N > x\rfloor$
Grundform $\exists\lceil$*Platzhalter* mit *Bedingungen*$\rfloor$

Der Vorteil ist hier weniger die Einsparung von Klammern, als die kürzere Aussprache: statt *es existiert ein Beispiel zur Abstration bestehend aus N mit* $N \in \mathbb{N}$ *und* $N > x$ in der Grundform, ist die Textversion der Alternativnotation *es existiert ein N mit* $N \in \mathbb{N}$ *und* $N > x$.

Bei Satzaussagen benutzt man die Tatsache, dass die Folgerung eines Satzes *für alle* zulässigen Ersetzungen der Voraussetzungsplatzhalter gilt.

$\forall$*Platzhalter* mit *Bedingungen* gilt *Folgerung*
Aussprache($\forall$) *für alle*
Beispiel $\forall \epsilon$ mit $\epsilon > 0$ gilt $a + \epsilon \geq b$
Grundform In $\lceil$*Platzhalter* mit *Bedingungen*$\rfloor$ gilt *Folgerung*

Ist die Voraussetzung ein Fall mit einer einzelnen Aussage als Fallbeschreibung, dann können wir auch folgende Schreibweise wählen

Voraussetzung $\Rightarrow$ *Folgerung*
Aussprache($\Rightarrow$) *impliziert* oder *aus ... folgt ...*
Beispiel $a \in (-1, 1) \Rightarrow \cos(a) > 0$
Grundform In $\lceil$ mit *Voraussetzung*$\rfloor$ gilt *Folgerung*

Ist eine Aussage ohne Bedingungen gültig, können wir dies auch als Satzaussage formulieren.

Es gilt *Folgerung*
Beispiel Es gilt $\neg(x \in \emptyset)$
Grundform In Fall() gilt *Folgerung*

Schließlich gibt es häufig auftretende Aussagen, die sich aus den Grundformen darstellen lassen, und für die eigene Abkürzungen zur Verfügung stehen.

Notation $\boxed{A}::\boxed{B}$ für $\forall x$ mit $x : A$ gilt $x : B$
Aussprache(::) *spezialisiert* oder *jedes Beispiel von ... ist ein Beispiel von ...*
Beispiel $\lceil x$ mit $x \in \mathbb{Q}\rfloor :: \lceil x$ mit $x \in \mathbb{R}\rfloor$

Die Gleichbedeutung von zwei Abstraktionen wird auf die zugehörigen Beispiele zurückgeführt.

Notation $\boxed{A}=\boxed{B}$ für $(A :: B) \wedge (B :: A)$
Aussprache$(=)$ *ist gleich* oder *ist gleichbedeutend mit*
Beispiel $\lceil x \text{ mit } x \in \mathbb{R}, x > 0 \rfloor = \lceil x \text{ mit } x \in \mathbb{R}, \neg(x \leq 0) \rfloor$

Die beiden letzten Notationen handeln von Eindeutigkeit der Beispiele einer Abstraktion.

Notation $!\boxed{A}$ für $\forall u, v$ it $u : A, v : A$ gilt $u = v$
Aussprache(!) *...ist eindeutig*
Beispiel $!\lceil x \text{ mit } x \in \mathbb{R}, x > 0, x^2 = 2 \rfloor$

Da die Eindeutigkeit nicht impliziert, dass überhaupt ein Beispiel existiert, benutzen wir schließlich noch folgende Abkürzung.

Notation $\exists!\boxed{A}$ für $(\exists A) \wedge (!A)$
Aussprache$(\exists!)$ *es gibt genau ein Beispiel zu*
Beispiel $\exists!\lceil x \text{ mit } x \in \mathbb{R}, x > 0, x^2 = 2 \rfloor$

1.10. Typische Verbesserungspunkte

1) Keine undefinierten Zeichenketten benutzen
Trennen Sie Ihren Alltagskontext in der realen Welt streng von Ihrem Alltagskontext in der Mathematik. Zeichenketten (Wörter) aus der realen Welt sind meistens im Mathematikkontext nicht definiert. So ist

⌈Farbe, Form mit
Farbe = {rot, grün, blau},
Form = {rund, eckig},
⋮
⌋

falsch, wenn rot, grün, blau, rund, eckig im umgebenden Kontext nicht definiert wurden. Statt dessen ist

$\lceil$ rot, grün, blau, rund, eckig mit
Farbe := {rot, grün, blau},
Form := {rund, eckig},
$\vdots$
$\rfloor$

korrekt und spiegelt wider, dass in dem beschriebenen Kontext mit den Platzhalterbegriffen gearbeitet werden soll. Im Weiteren muss man mit Alltagsbegriffen auch dahingehend vorsichtig sein, dass man keine Eigenschaften der Begriffe unreflektiert aus dem Realkontext übernimmt. So ist rot $\neq$ blau in der Realwelt offensichtlich, auf der Ebene der Platzhalter aber keineswegs (zwei Platzhalter können durchaus identisch sein). Mit anderen Worten, rot $\neq$ blau ist eine Eigenschaft die wie rot $\neq$ grün und grün $\neq$ blau gefordert werden muss. Knapp kann man das so formulieren

$\lceil$ rot, grün, blau, rund, eckig mit
Farbe := {rot, grün, blau}, #Farbe = 3,
Form := {rund, eckig}, #Form = 2,
$\vdots$
$\rfloor$

2) Platzhalter nicht außerhalb ihrer Kontextklammern benutzen
Sind Größen mit Namen x, y im umgebenden Kontext nicht definiert, dann ist folgende Formulierung falsch

$\exists\, x, y$ mit $f(x) < 0, f(y) > 0\rfloor$,
$m := \dfrac{x+y}{2}$,
$\vdots$

Wie immer ist hier entscheident, dass man die Formulierungen der Modellierungssprache nicht umgangssprachlich interpretiert sondern sich streng an die Interpretationsregeln hält. Liest man die Existenzaussage gemäß Abschnitt 1.9 als *es existieren x, y mit der Eigenschaft, dass $f(x) < 0$ und $f(y) > 0$ gilt*, so könnte man intuitiv der Auffassung sein, ein solches x und y stände nach dieser Zeile auch unter den jeweiligen Namen zur Verfügung. Das ist aber nicht so! Entsprechend der Interpretationsregel ist die $\exists$-Zeile nur eine Aussage. Um sie zu beweisen muss man ein entsprechendes Beispielpaar angeben. Liegt sie vor, dann werden gewisse Beweisschritte ermöglicht. Sonst nichts.

Ob eine der folgenden Varianten gemeint war, weiß natürlich nur der Modellformulierer. Zumindest ist sowohl

$$\exists\, x, y \text{ mit } f(x) < 0, f(y) > 0,\, m := \frac{x+y}{2}, \ldots\rfloor$$

als auch

$$m(x, y \text{ mit } f(x) < 0, f(y) > 0) := \frac{x+y}{2},$$

syntaktisch korrekt. Zu beachten ist, dass in gewissen Formulierungen der Modellierungssprache (zum Beispiel bei der Definition von m als Zuordnung) auf Platzhalternamen außerhalb der Kontextklammern Bezug genommen wird (die Langform ist hier ja $m := \lceil x, y \text{ mit } f(x) < 0, f(y) > 0\rfloor \mapsto (x+y)/2$). Hier ist aber ausdrücklich vereinbart, dass dies in Kombination mit speziellen Zeichen (wie etwa $\mapsto$) geschehen darf.

3) Namen ohne graphische Gestaltungsmittel
Als Parameter- oder Definitionsnamen sind nur reine Zeichenketten erlaubt, d.h. Zeichen der mathematiküblichen Zeichensätze, die in gleicher Höhe nebeneinander angeordnet werden. Ausgenommen sind dabei führende Zahlen oder spezielle Symbole wie das Gleichheitszeichen, der Doppelpunkt, Plus- und Minussymbole etc., da deren Verwendung in einem Namen zu Missverständnissen führen kann.

Explizit ausgenommen sind auch Hoch- und Tiefstellungen, sowie Schlangen, Pfeile, Striche etc. Der Grund hierfür ist, dass diese Verzierungen üblicherweise in Notationen benutzt werden und damit einen anderen Ausdruck abkürzen. So steht die Tiefstellung in den meisten Fällen für einen Komponentenzugriff oder eine Funktionsauswertung. Statt

$$\lceil u_1, u_2, u_3 \text{ mit } u_1 \in A, u_2 \in A, u_3 \in A, \ldots\rfloor$$

meint der Modellverfasser wohl eigentlich

$$\lceil u \text{ mit } u \in \mathcal{F}(\{1,2,3\}, A), \dots \rfloor$$

oder

$$\lceil u \text{ mit } u \in A^3, \dots \rfloor$$

4) Nicht zu umständlich werden I
In Definitionen $Z := B$ muss die rechte Seite nicht unbedingt ein Kontext sein. Nach Abschnitt 1.9 sind generell Beschreibungen möglich, zu denen etwa auch Zuordnungsergebnisse zählen. So erkennt man in der syntaktisch korrekten Definition

$$\text{Farbe} := \lceil F \text{ mit } F : \text{Menge}, F = \{\text{rot,grün,blau}\} \rfloor$$

an der Verwendung des Gleichheitszeichen, dass hier genauso gut die deutlich kürzere und damit besser zu erfassende Zeile

$$\text{Farbe} := \{\text{rot,grün,blau}\}$$

gewählt werden könnte.

5) Nicht zu umständlich werden II
Es ist nicht syntaktisch falsch aber in der Regel unökonomisch, Platzhalter in einem Kontext aufzuführen, die vollständig durch andere Platzhalter festgelegt sind, wie B und C im folgenden Beispiel.

$$U := \lceil A, B, C \text{ mit } B = A^2, C = A - B, \dots \rfloor$$

Überprüfen Sie bei solchen Größen, ob es nicht sinnvoller ist, sie besser im Kontext zu definieren, also

$$U := \lceil A \text{ mit } B := A^2, C := A - B, \dots \rfloor$$

Entscheident ist dabei, ob man U lieber in der Form $[x, y, z] : U$ oder als $x : U$ benutzen will.