

Numerik gewöhnlicher D, Differentialgleichungen

Erinnerung: Differentialgleichungsproblem (DGP) π gegeben durch

- $n \in \mathbb{N}$ Dimension
- $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ Definitionsbereich von
- $\pi: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$ rechte Seite / Rechtsfunktion / Fern

wird zu Anfangswertproblem (AWP) π mit Zusatzdaten

$$(t_0, x_0) \in \mathcal{D}$$

$x: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt Lösung von π , wenn

- $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall ist mit $\sup I > \inf I$ und x diffbar auf I
 - $t \mapsto (t, x(t)) \in \mathcal{D}$ für alle $t \in I$ und $x'(t) = \pi(t, x(t))$ für alle $t \in I$.
- Ist π ein AWP, muss zusätzlich gelten: $t_0 \in I$ und $x(t_0) = x_0$.

Grundidee zur Lösung: Sei x beliebige Funktion auf $[t_0, T]$

$$X(t) = X_0 + \underbrace{X(t) - X(t_0)}_{\text{Gesamtwachstum}}$$

Startwert

$$X(t_0) = X_0$$

$$X(t_1) - X(t_0) + \underbrace{X(t_2) - X(t_1)}_{\text{}} + \dots + \underbrace{X(t_n) - X(t_{n-1})}_{\text{}}$$

$$t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$$

Teilwachse (Teleskopsumme!)

$$X(t_i) - X(t_{i-1}) = \frac{X(t_i) - X(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}} (t_i - t_{i-1})$$

Wachstumsrate F_{i-1}

nach MWS: $F_{i-1} = x'(\xi_i)$
($n=1$ sonst Komponentenweise) (t_{i-1}, t_i)

$$X(t_n) = X_0 + \sum_{i=0}^{n-1} F_i (t_{i+1} - t_i)$$

Jede Funktion kann man Startwert und Zuwachsraten teleskopiert über den, beachte: (Anf) T gibt X_0 und Raten vor

Zentrale Frage: Wie approximiert man π_x aus π ?

(so dass Lsg möglichst gut und billig approximiert wird
bei Erhaltung möglichst vieler qualitativer Eigenschaften (Positivität, Unveränd. Stabilität, ...))

$$X(t_{i+1}) \cdot X(t_i) \approx \underbrace{X'(t_i)} + \frac{1}{2} \underbrace{X''(t_i)} (t_{i+1} - t_i) + \frac{1}{6} \underbrace{X'''(t_i)} (t_{i+1} - t_i)^2 + \dots + \frac{1}{k!} \underbrace{X^{(k)}(t_i)} (t_{i+1} - t_i)^{k-1}$$

Satz von Taylor

Wenn X Lsg: $F(t_i, X(t_i))$

können aus DGL ermittelt werden

Höhere Zeitableitungen:

$$x''(t) = \frac{d}{dt} x'(t) = \frac{d}{dt} f(t, x(t))$$

$$= \partial_1 f(t, x(t)) + \partial_2 f(t, x(t)) x'(t)$$

$$= \partial_1 f(t, x(t)) + \partial_2 f(t, x(t)) f(t, x(t)) =: f^{(2)}(t, x(t))$$

analog

$$x'''(t) = \partial_1 f^{(2)}(t, x(t)) + \partial_2 f^{(2)}(t, x(t)) f(t, x(t)) =: f^{(3)}(t, x(t))$$

usw. usw.

viel Spaß bei Kettenregel!

$$\tilde{f}_i = \left(\tilde{f}^{(1)} + \frac{1}{2} (t_{i+1} - t_i) \tilde{f}^{(2)} + \dots + \frac{1}{k!} (t_{i+1} - t_i)^{k-1} \tilde{f}^{(k)} \right) (t_i, \tilde{x}(t_i))$$

$$\tilde{x}(t_{m+1}) = x_0 + \sum_{i=0}^m (t_{i+1} - t_i) \tilde{f}_i = \tilde{x}(t_m) + (t_{m+1} - t_m) \tilde{f}_m$$

$$= \tilde{x}(t_m) + \sum_{j=1}^k \frac{1}{j!} (t_{m+1} - t_m)^j \tilde{f}^{(j)}(t_m, \tilde{x}(t_m))$$

"explizites Taylorverfahren"

specialfall (k=1):

$$\tilde{x}(t_{m+1}) = \tilde{x}(t_m) + (t_{m+1} - t_m) f(t_m, \tilde{x}(t_m))$$

explizites Eulerverfahren

Nachteil: aufwendige Berechnung der $F^{(i)}$

andere Idee: HS + Integralapproximation

$$\begin{aligned}
 \frac{x(t_{i+1}) - x(t_i)}{t_{i+1} - t_i} &= \frac{1}{t_{i+1} - t_i} \int_{t_i}^{t_{i+1}} x'(t) dt = \frac{1}{t_{i+1} - t_i} \int_{t_i}^{t_{i+1}} F(t, x(t)) dt \\
 &\quad \uparrow \text{HS} \qquad \qquad \qquad \uparrow \text{wenn } x \text{ Lsg von } \Pi \qquad \qquad \qquad \uparrow \text{Integralapprox}
 \end{aligned}$$

Wähle $\tilde{f}_i(t) \approx f(t) = F(t, x(t))$ auf $[t_i, t_{i+1}]$
 so dass $\tilde{f}_i$ leicht zu integrieren ist (z.B. Polynominterp.)

einfachster Fall:

$$\tilde{f}_i(t) = f(t_i)$$

konstante Interpolation

$$\tilde{f}_i = \frac{1}{t_{i+1} - t_i} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \tilde{f}_i(t) dt = \tilde{f}(t_i) = F(t_i, \tilde{X}(t_i))$$

dann

$$\tilde{X}(t_{m+1}) = \tilde{X}(t_m) + (t_{m+1} - t_m) \tilde{F}_m = \tilde{X}(t_m) + (t_{m+1} - t_m) F(t_m, \tilde{X}(t_m))$$

"explizites Euler Verfahren"

andere Möglichkeit:

$$\tilde{f}_i(t) = \tilde{f}(t_{i+1})$$

konstante Interpolation

wie oben:

$$\tilde{F}_i = F(t_{i+1}, \tilde{X}(t_{i+1}))$$

wie oben:

$$\tilde{X}(t_{m+1}) = \tilde{X}(t_m) + (t_{m+1} - t_m) F(t_{m+1}, \tilde{X}(t_{m+1}))$$

"

implizites Euler-Verfahren"

zur berechnen Interpolation: benutze mehr Interpolationspunkte...
schon klar: Verfahren implizit, wenn Zukunftspunkte beteiligt

Interpolationspunkte $\subset \{t_0, \dots, t_m\}$: "Mischungsverfahren"

Interpolationspunkte $\subset [t_i, t_{i+1}]$: "Einschnittverfahren"

Beispiel: Adams-Bashforth Verfahren

Konstruiere aus

$\underbrace{\tilde{f}(t_i), \tilde{f}(t_{i-1}), \dots, \tilde{f}(t_{i-s+1})}_{s \text{ Stützpunkte}}$

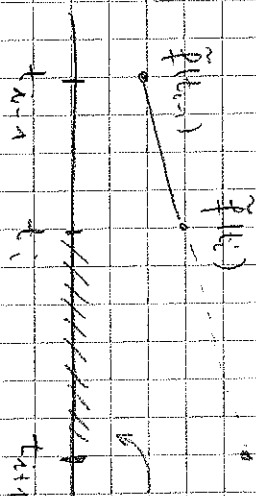
Interpolationspolynom $\tilde{f}_x(t)$

konstant für $s=2$

$$\tilde{f}_x(t) = \frac{t-t_{i-1}}{t_i-t_{i-1}} \tilde{f}(t_{i-1}) + \frac{t-t_{i-2}}{t_i-t_{i-2}} \tilde{f}(t_i)$$

Lagrange-Grundpolynome

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} \tilde{f}_x(t) dt = \frac{1}{2} \frac{(t_{i+1}-t_i)^2}{t_{i+1}-t_i} \tilde{f}(t_{i-1}) + \left(\frac{1}{2} \frac{(t_{i+1}-t_i)^2}{t_i-t_{i-1}} + t_{i+1}-t_i \right) \tilde{f}(t_i)$$



Interpolationsgebiet

Extrapolation

Liefert die approximative Rate:

$$\tilde{f}_i = \frac{1}{t_{i+1} - t_i} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \tilde{f}_i(t) dt = -\frac{1}{2} \frac{t_{i+1} - t_i}{t_i - t_{i-1}} F(t_i, \tilde{X}(t_{i-1})) + \left(1 + \frac{1}{2} \frac{t_{i+1} - t_i}{t_i - t_{i-1}}\right) F(t_i, \tilde{X}(t_i))$$

wird dann das explizite Verfahren

$$\tilde{X}(t_{m+1}) = \tilde{X}(t_m) + \left(\left(1 + \frac{1}{2} \frac{t_{m+1} - t_m}{t_m - t_{m-1}}\right) F(t_m, \tilde{X}(t_m)) - \frac{1}{2} \frac{t_{m+1} - t_m}{t_m - t_{m-1}} F(t_{m-1}, \tilde{X}(t_{m-1})) \right) (t_{m+1} - t_m)$$

beachte: $\tilde{X}(t_0) = X_0$

$\tilde{X}(t_1)$ benötigt $F(t_0, X_0)$ ✓ und $F(t_{-1}, \tilde{X}(t_{-1}))$?

dh Iteration nummeriert sich als $\tilde{X}(t_2)$ (allgemein als $\tilde{X}(t_s)$)

für $\tilde{X}(t_1), \tilde{X}(t_{s-1})$ benutze Auflaufrechnung zB mit Taylorverfahren

oder Einschrittverfahren