

Beispiel: Adams-Moulton-Verfahren

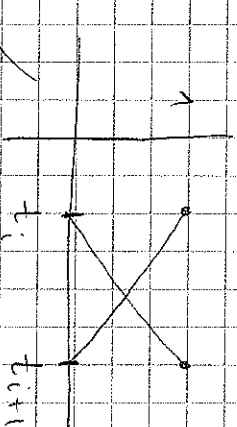
Kausiwere $\tilde{f}(t)$ aus $\tilde{f}(t_{i+1}), \tilde{f}(t_i), \dots, \tilde{f}(t_{i-s+1})$

implizite Verfahren

s+1 Stützweite

$$s=1 \quad \tilde{f}_x(t) = \frac{t-t_{i+1}}{t_i-t_{i+1}} \tilde{f}(t_i) + \frac{t-t_i}{t_{i+1}-t_i} \tilde{f}(t_{i+1})$$

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} \tilde{f}_x(t) dt = \frac{1}{2} (t_{i+1}-t_i) (\tilde{f}(t_i) + \tilde{f}(t_{i+1}))$$



$$\tilde{f}_i = \frac{1}{2} (\tilde{f}(t_i) + \tilde{f}(t_{i+1}))$$

$$\hookrightarrow \text{implizites Trapez-Verfahren} \quad \tilde{x}(t_{i+1}) = \tilde{x}(t_i) + \frac{t_{i+1}-t_i}{2} (\tilde{f}(t_i, \tilde{x}(t_i)) + \tilde{f}(t_{i+1}, \tilde{x}(t_{i+1})))$$

Variation des Parameters "HS + Integraltransformation"

$$\frac{X(t_{i+1}) - X(t_i)}{t_{i+1} - t_i} = \frac{X(t_{i+1}) - X(t_i)}{t_{i+1} - t_i} + \frac{X(t_{i+1}) - X(t_i)}{t_{i+1} - t_i}$$

$$\frac{1}{t_{i+1} - t_i} \int_{t_i}^{t_{i+1}} F(t, X(t)) dt$$

22 $\leftarrow$ quadr. approx

$$\frac{1}{t_{i+1} - t_i} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \tilde{F}_i(t) dt$$

$\nwarrow$ wieder mit Lagrange Interpolation

Beispiel: Nyström-Verfahren

benutze $\tilde{F}(t_i), \tilde{F}(t_{i+s})$ $\rightarrow$ explizite Verfahren
s. Stützstellen

$s=2$, äquidistanten gitter: $\tilde{X}(t_{i+1}) = \tilde{X}(t_{i+1}) + 2h F(t_i, \tilde{X}(t_i))$

dh $t_i = ih$

Beispiel: Milne - Simpson - Verfahren

benutze $\underbrace{\tilde{f}(t_{i+1}), \dots, \tilde{f}(t_{i+s+1})}_{s+1 \text{ St\"uckstellen}} \leadsto$ implizite Verfahren

$$s=2, \text{ "dunkel" laut: } \tilde{x}(t_{i+1}) = \tilde{x}(t_{i-1}) + \frac{h}{3} (\tilde{f}(t_{i-1}, \tilde{x}(t_{i-1})) + 4\tilde{f}(t_i, \tilde{x}(t_i)) + \tilde{f}(t_{i+1}, \tilde{x}(t_{i+1})))$$

Simpsonregel

Variation der Integralapproximation:

Nurte Quadraturformel mit Stützstellen in $[t_i, t_{i+1}]$

$$\frac{1}{t_{i+1} - t_i} \int_{t_i}^{t_{i+1}} F(t, x(t)) dt = \int_0^1 f(t_i + h_i \tau) d\tau \approx \underbrace{\sum_{j=1}^s b_j g(\tau_j)}_{\substack{\text{gewichte} \\ \text{QF}}} \approx \sum_{j=1}^s b_j \underbrace{F(t_i + h_i \tau_j, x(t_i + h_i \tau_j))}_{\substack{\text{Stützstellen} \\ \text{Problem: unbekannt}}}$$

nurte wieder Integraldarstellung

$$x(t_i + h_i \tau_j) = x(t_i) + \int_{t_i}^{t_i + h_i \tau_j} F(t, x(t)) dt$$

$$= x(t_i) + h_i \int_0^{\tau_j} f(t_i + h_i \tau) d\tau = x(t_i) + h_i \int_0^{\tau_j} g(\tau) d\tau$$

$$\approx x(t_i) + h_i \sum_{k=1}^s a_k g(\tau_k)$$

nurte wieder QF aber jetzt mit gleichen Stützstellen $t_i + h_i \tau_j$ $j=1, \dots, s$ wie vorher (damit nicht noch weitere Unbekannte auftreten);

die gewichte sind so zu wählen, dass $\int_0^1 g(\tau) d\tau$ approx. wird (braucht ja allg. form)

Verfahren:

$$\tilde{x}(t_{m+1}) = \tilde{x}(t_m) + h_m \sum_{j=1}^s \overline{b_j} g_j$$

nach Lösung von: $g_j = F(t_m + h_m \overline{c_j}, \tilde{x}(t_m) + h_m \sum_{k=1}^s \overline{a_{jk}} g_k)$ $j=1, \dots, s$

c_1	a_{11}	a_{12}	a_{1s}
c_2	a_{21}	a_{22}	a_{2s}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
c_s	a_{s1}	a_{s2}	a_{ss}
	b_1	$\dots$	b_s

"Butcher-Schema"

"Stufe" des Verfahrens

$$\int_0^1 g(\tau) d\tau \approx 1 \cdot g(0)$$

$$b_1 \nearrow \nearrow c_1$$

$$\begin{array}{r|l} 0 & 0 \\ \hline & 1 \end{array}$$

$$\int_0^1 g(\tau) d\tau = 0 \cdot g(0) \nearrow a_{11}$$

$$\tilde{x}(t_{m+1}) = \tilde{x}(t_m) + h_m F(t_m, \tilde{x}(t_m))$$

explizites Euler Verfahren

$$g_1 = F(t_m, \tilde{x}(t_m))$$

Beispiel: Rechteckregel Runge

Rechteckregel nicht

$$\int_0^1 g(x) dx \approx 1 \cdot g(1)$$

$$\int_0^1 g(x) dx \approx 1 \cdot g(1)$$

$$\frac{1}{1} \Bigg| \frac{1}{1}$$

$$g_1 = f(t_m + h_m, \underbrace{\tilde{x}(t_m) + h_m g_1}_{= t_{m+1}})$$

$$\tilde{x}(t_{m+1}) = \tilde{x}(t_m) + h_m f(t_{m+1}, \tilde{x}(t_{m+1}))$$

implizites Euler Verfahren

Beispiel Gauss-Legendre Quadratur $\int_0^1 g(x) dx \approx \sum_{i=1}^5 b_i g(c_i)$

Gewichte / Stützstellen von Gauss-Legendre

$$\int_0^1 g(x) dx \approx \int_0^1 \sum_{k=1}^5 L_k(x) g(c_k) dx$$

Lagrange Grundpolynome zu $c_1, \dots, c_5$

$$= \sum_{k=1}^5 g_k g(c_k) \quad \text{mit} \quad g_k = \int_0^1 L_k(x) dx$$

Konkret $S=1$, $b_1=1$, $c_1=\frac{1}{2}$ $L_1(z) = 1$ (Lagrange Grundpolynom)

$$a_m = \int_0^{c_1} L_1(z) dz = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1/2}{1}$$

$$g_1 = \tau\left(t_m + \frac{1}{2}h_m, \tilde{X}(t_m) + \frac{1}{2}h_m g_1\right)$$

$$\tilde{X}(t_{m+1}) = \tilde{X}(t_m) + h_m g_1$$

$$\left\{ \frac{\tilde{X}(t_{m+1}) + \tilde{X}(t_m)}{2} = \tilde{X}(t_m) + \frac{1}{2}h_m g_1 \right.$$

$$\text{also: } \tilde{X}(t_{m+1}) = \tilde{X}(t_m) + h_m \tau\left(\frac{t_m + t_{m+1}}{2}, \frac{\tilde{X}(t_m) + \tilde{X}(t_{m+1})}{2}\right)$$

"Average Punktregel"

alternative Idee: approximiere $X(t)$ durch Interpolation von

$$X(t_{i+1}), \dots, X(t_{i+s+1})$$

$$X(t) \approx \sum_{j=i-s}^{i+s} \tilde{X}(t_{j+1}) L_j(t)$$

nutze $X'(t_{i+1}) = F(t_{i+1}, X(t_{i+1}))$ als Endwert der DGL für

$$\tilde{X}(t_{i+1}), \dots, \sum_{j=i-s}^{i+s} \tilde{X}(t_{j+1}) L_j'(t_{i+1}) = F(t_{i+1}, X(t_{i+1}))$$

$$\mathcal{L}_s \quad \tilde{X}(t_{i+1}) = \left(F(t_{i+1}, \tilde{X}(t_{i+1})) - \sum_{j=i-s}^{i-1} \tilde{X}(t_{j+1}) L_j'(t_{i+1}) \right) / L_s'(t_{i+1})$$

(Bzw. äquivalente Rate $\tilde{F}_i = \frac{\tilde{X}(t_{i+1}) - \tilde{X}(t_i)}{t_{i+1} - t_i}$ liefert

$$\tilde{X}(t_{i+1}) + (t_{i+1} - t_i) \tilde{F}_i \approx \tilde{X}(t_{i+1})$$

"Endwert der DGL für t_{i+1} "

ISDP-Verfahren

Zusammenfassung:

- Taylorverfahren ... brucha Ableitungen von F (Einschränkungen)
- Adams - Bashforth/Moulton, Nystrom, Milne-Simpson, BDF - Verfahren

Es lineare Mehrschrittverfahren (im äquidistanten Falle)

$$\sum_{k=0}^m \alpha_k \ddot{x}(t_{j+k}) = h \sum_{k=0}^m \beta_k F(t_{j+k}, \ddot{x}(t_{j+k})) \quad j=0, \dots, n-m$$

- allgemeine Runge-Kutta Verfahren (Einschrittverfahren)

$$\begin{array}{c|c} c_1 & \alpha_1 \dots \alpha_s \\ \hline c_s & 1 \dots 1 \end{array} \quad \ddot{x}(t_{j+1}) = \ddot{x}(t_j) + h_j \sum_{i=1}^s b_i \ddot{g}_i \quad j=0, \dots, n-1$$

$$\ddot{g}_i = F(t_j + h_j c_i, \ddot{x}(t_j) + h_j \sum_{k=0}^s a_{ik} \ddot{g}_k) \quad i=1, \dots, s$$

... große Vielfalt ... wann benutzt man was?