

Definition 2.1:

Sei  $\alpha$  ein Approximationsverfahren und  $\Pi$  ein AWP mit Lösung  $y$  auf  $I_\alpha$ . Ist  $G$  ein zulässiges Gitter zu  $\alpha$ , dann heißt

$$F_G(t, y) = \frac{\delta_G y(t)}{\delta t} - V_G(t, y) \quad t \in (a, b]_G$$

lokaler Diskretisierungsfehler von  $\alpha$  bzgl.  $\Pi$ .

gilt für jede Folge  $(G_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \Pi$  mit  $\max \delta_{G_k} \rightarrow 0$

$$\|F_{G_k}(y)\|_{G_k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0 \quad (\text{bzw. } \|F_{G_k}(y)\|_{G_k} \leq C \max \delta_{G_k}^p)$$

so heißt  $\alpha$  konsistent zu  $\Pi$  (von Ordnung  $p$ )

gilt für die Lösungen  $X_{G_k}$  von  $\alpha$

$$\|X_{G_k} - y\|_{G_k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0 \quad (\text{bzw. } \|X_{G_k} - y\|_{G_k} \leq C \max \delta_{G_k}^p)$$

so heißt  $\alpha$  konsistent gegen  $\Pi$  (von Ordnung  $p$ )

Beispiel: explizites Euler Verfahren

$$y'_g(t, u) = f(s, u(s)) \quad s = t - \delta t \quad t \in (a, b]_g$$

Satz von Taylor

$$\frac{\delta y_k(t)}{\delta t} = \frac{y_k(s + \delta t) - y_k(s)}{\delta t} = y'_k(s) \delta t + \frac{1}{2} y''_k(s + \theta \delta t) (\delta t)^2 = f_k(s, y(s)) + \frac{1}{2} y''_k(s + \theta \delta t) \delta t$$

$$\text{also } \|I_{\delta}(t, y)\|_{\infty} = \left\| \frac{\delta y_k(t)}{\delta t} - f(s, y(s)) \right\|_{\infty} \leq \frac{1}{2} C \delta t$$

schönke für  $\|y''\|$

$$\text{also } \|I_{\delta}(y)\|_G \leq \frac{1}{2} C \max \delta_g$$

Ergebnis: Ist  $y \in C^2(I)$  dann ist das explizite Euler-Verfahren konsistent von erster Ordnung

man erkennt typische Schritte der Konvergenzanalyse

- exakte Lösung im Verfahren einsehen und Größe abschätzen "Konsistenzanalyse" mit

Satz von Taylor

- Lipschitzstetigkeit von  $F_n$  überprüfen "Stabilitätsanalyse"

Memo:

Konsistenz + Stabilität bedeutet Konvergenz

und die Konvergenzordnung ist dann gleich der Konsistenzordnung

hinreichend für Lipschitzstetigkeit ist

Definition 2.2.

Ein Approximationsverfahren  $\alpha$  erfüllt die globale Lipschitz-Bedingung wenn  $L > 0$  existiert so dass für alle  $q \in \Gamma$  und  $u, w \in \mathcal{F}_q$  gilt

$$\|V_q(t, u) - V_q(t, w)\|_{\infty} \leq L \max_{s \in [q, t]_q} \|u(s) - w(s)\|_{\infty}$$

Als Hilfsmittel benötigen wir das diskrete Grenzwert-Lemma

Lemma 2.3

Seien  $a_0, a_1, b_0, b_{n-1}, a_0, a_n \geq 0$   $a_k \leq a_{k+1}$  und

$$e_k \leq a_k + \sum_{j=0}^{k-1} b_j e_j \quad k=0, \dots, n$$

Dann gilt  $e_k \leq a_k \exp\left(\sum_{j=0}^{k-1} b_j\right) \quad k=0, \dots, n$

Beweis.  $V_k := a_k + \sum_{j=0}^{k-1} b_j V_j$  Wir zeigen per Induktion:  $e_k \leq V_k \leq a_k \exp\left(\sum_{j=0}^{k-1} b_j\right)$

nach Vor:

$$e_0 \leq a_0 = V_0 = a_0 \exp\left(\sum_{j=0}^{-1} b_j\right)$$

$k=0, \dots, n$

$$e_{k+1} \leq a_{k+1} + \sum_{j=0}^k b_j e_j \quad \uparrow \quad \leq a_{k+1} + \sum_{j=0}^k b_j V_j \quad \uparrow \quad V_{k+1} = a_{k+1} - a_k + V_k + b_k V_k$$

Ind Ann

Def

$$\leq \underbrace{(a_{k+1} - a_k)}_{\geq 0} \exp\left(\sum_{j=0}^k b_j\right) + \underbrace{(1 + b_k)}_{\leq \exp(b_k)} V_k \quad \text{2nd Ann} \quad \leq a_k \exp\left(\sum_{j=0}^{k-1} b_j\right)$$

$$\leq a_{k+1} \exp\left(\sum_{j=0}^k b_j\right) \quad \checkmark$$

□

Satz 2.4. Sei  $\alpha$  ein Approximationsverfahren, das die globale Lipschitz-Bedingung erfüllt.  
Dann existiert ein  $C > 0$  so dass für jeden  $G \in \Gamma$  gilt.

$$\|E_G^{-1}(f) - E_G^{-1}(g)\|_G \leq C \|f - g\|_G$$

Beweis: Sei  $u = E_G^{-1}(f)$  also  $E_G(u) = f$  also

$$u(a) = x_0 = f(a), \quad \frac{\delta u(t)}{\delta t} = V_G(t, u) = f(t)$$

umgekehrt sei  $w = E_G^{-1}(g)$  für  $t \in G$  ist

$$u(t) - w(t) = u(a) + \sum_{s \in [a, t]_G} \delta u(s) - w(a) - \sum_{s \in [a, t]_G} \delta w(s)$$

$$= f(a) - g(a) + \sum_{s \in [a, t]_G} (f(s) - g(s)) \delta s + \sum_{s \in [a, t]_G} (V_G(s, u) - V_G(s, w)) \delta s$$

$$\|u(t) - w(t)\|_\infty \leq \|f(a) - g(a)\| + \underbrace{\sum_{s \in [a, t]_G} \|f(s) - g(s)\| \delta s}_{A(t)} + \sum_{s \in [a, t]_G} L e(s - \delta s) \delta s$$

monoton wachsend in  $t$

$$\text{mit } e(\tau) = \max_{s \in [a, \tau]_G} \|u(s) - w(s)\|_\infty$$

monoton wachsend in  $t$

finden das Maximum von  $t \in [a, k]_G$  liefert

$$e(k) \leq A(k) + \sum_{s \in [a, k]_G} L(e(s)) \delta s$$

und das Gesamtergebn liefert

$$\|E^{-1}(f) - E^{-1}(g)\|_G = \|u - v\|_G = e(b) \leq A(b) \exp\left(\sum_{s \in [a, b]_G} L \delta s\right)$$

$$= e^{L(b-a)} (\|f(a) - g(a)\|_a + \sum_{s \in [a, b]_G} \|f(s) - g(s)\|_\infty \delta s)$$

$$\leq \underbrace{(1 + b-a)}_C e^{L(b-a)} \|f - g\|_G$$

