

Stabilitätsuntersuchung für RK Verfahren:

$$\frac{\delta X(t)}{\delta t} = \sum_{i=1}^s b_i g_i$$

$$z = t - \delta t \quad (*) \quad g_i = F\left(z + c_i \delta t, X(z) + \delta t \sum_{j=1}^s a_{ij} g_j\right) \quad i=1, \dots, s$$

Achtung: Wenn $a_{ij} \neq 0$ für ein $j \neq i$ dann ist Gleichung (*) für $g = \begin{pmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_s \end{pmatrix}$ implizit und damit ist nicht klar, dass $\sum_{i=1}^s b_i g_i$ eine Funktion von $X(z)$ ist!

Definition 2.5 Ein DGR π erfüllt die globale Lipschitzbedingung, wenn

$$\mathcal{D} = [a, b] \times \mathbb{R}^d, \quad F \in C(\mathcal{D}, \mathbb{R}^d) \text{ und}$$

$$\exists L > 0 : \forall t \in [a, b] : \forall u, v \in \mathbb{R}^d : \|F(t, u) - F(t, v)\|_{\infty} \leq L \|u - v\|_{\infty}$$

mit

$$\Phi(g) = \left(T(t+g, \delta t \sum_{j=1}^5 a_j g_j) \right. \\ \left. T(t+g, \delta t \sum_{j=1}^5 a_j g_j) \right)$$

später: $\hat{\Phi}(g, x(t))$

hat (x) die FP Form $g = \Phi(g)$ auf $X = (\mathbb{R}^{dx})_{|x| \leq 1}$ mit $\|g\| = \max_{i=1}^5 \|g_i\|_\infty$

Φ Selbstabbildung auf X ✓

Φ Kontraktion auf X ? π er fülle globale Lipschitz-Bedingung

$$\|\Phi(\xi) - \Phi(\eta)\|_\infty \leq L \delta t \sum_{i=1}^5 \|a_i\| \|\xi - \eta\|$$

also $\|\Phi(\xi) - \Phi(\eta)\| \leq L N A \delta t \|\xi - \eta\|$

unter Benutzung von $A = (a_i)$

Φ kontrahiert, falls $\delta t < \frac{1}{L N A}$

Banachscher FP-Satz: (*) hat eindeutige Lösung

+ praktisch nutzbare Verfahren: FP-Iteration konvergiert mit jedem Startwert (sinnvoll: g_i den vorherigen Zwischenschritt nehmen!)

Da ϕ von $x(t)$ abhängig, hängt Lösung von $x(t)$ ab d.h.

$$\tilde{V}(x(t)) = \sum_{i=1}^5 b_i g_i(x(t)) \quad g(x(t)) \text{ Lsg von } g = \hat{\phi}(g, x(t))$$

$$\|g_i(u) - g_i(v)\|_{\infty} = \|\hat{\phi}_i(g(u), u) - \hat{\phi}_i(g(v), v)\|_{\infty}$$

$$\leq L \|u - v\|_{\infty} + \delta t \sum_{j=1}^5 a_j \|g_j(u) - g_j(v)\|_{\infty}$$

$$\leq L \|u - v\|_{\infty} + L \|A\| \delta t \|g(u) - g(v)\|_{\infty}$$

$$\Rightarrow \|g(u) - g(v)\|_{\infty} \leq \frac{L}{1 - L \|A\| \max \delta} \|u - v\|_{\infty}$$

$$\Rightarrow \|V(u) - V(v)\|_{\infty} \leq \frac{\|b\|_1 L}{1 - L \|A\| \max \delta} \|u - v\|_{\infty}$$

$\Rightarrow$ RK-Verfahren als Funktion $V_g(t, x) = \tilde{V}(x(t - \delta t))$ ist LIP-stetig

Definition 2.6

Sei Π ein AWP, das die globale Lipschitz-Bedingung mit $L > 0$ erfüllt.

Dann definiert die RK-Verfahrensvorschrift für jedes $g \in G$

mit $\max_{g \in G} \frac{1}{\|A\|}$ eine Lipschitzstetige Verfahrensformulation

und damit ein Approximationsverfahren α , das die globale

Lipschitz-Bedingung erfüllt.

Korollar 2.7

Sei Π ein AWP, das die globale Lip-Bedingung erfüllt.

Wird α dann durch eine RK-Vorschrift erzeugt, so genügt AV

und α konvergiert zu γ (von Ordnung p) dann ist

α konvergent gegen γ (von Ordnung p).