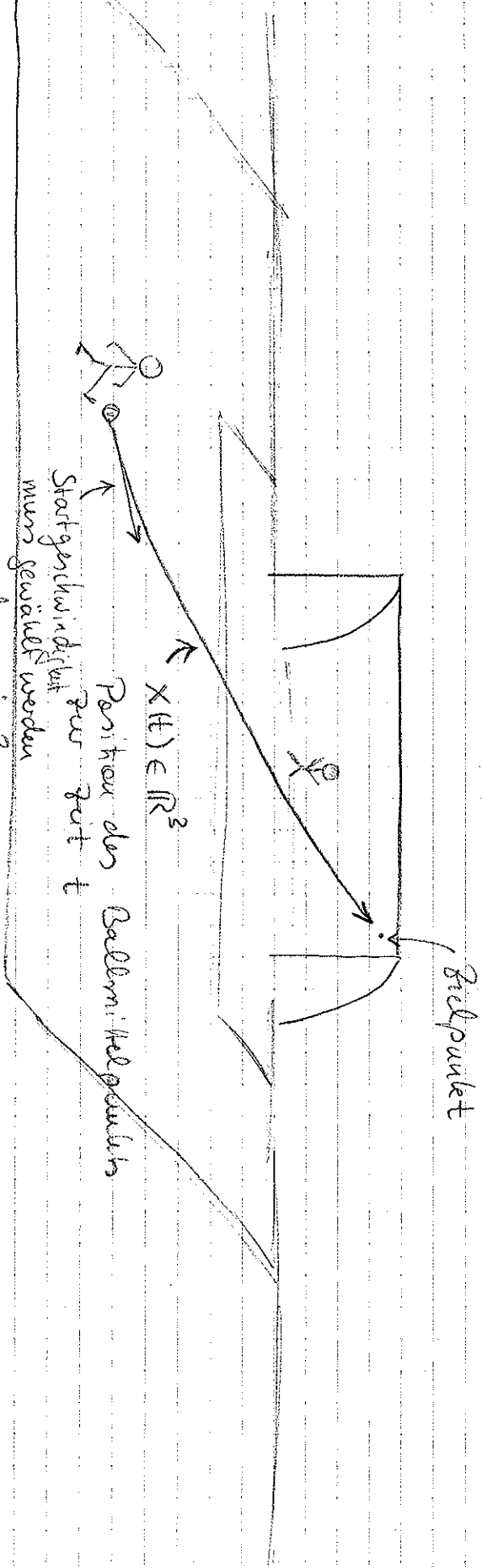


Kapitel 4: Einschieß - das Schießverfahren



... aber wie?

Dynamik (Newton):

$$\begin{cases} \ddot{x} = v \\ m\dot{v} + c\|v\|v + K(\omega \times v) = -mg \end{cases}$$

$\xrightarrow{\text{Masse}}$ $\xrightarrow{\text{Leitwupkoeffizient}}$ $\xrightarrow{\text{Drehgeschwindigkeit des Balls}}$ $\xrightarrow{\text{Erdbeschleunigung}}$
 Berechnung

Formelweg 1	$x(0)$ bekannt	$x(T)$ bekannt, T bekannt	$v(0)$ gesucht
Formelweg 2 (realistisch)	$x(0)$ bekannt, $\ v(0)\ $ bekannt	$x(T)$ bekannt	$\frac{v(0)}{\ v(0)\ }$ gesucht

Problemstellung 1: Randwertprobleme

$$y'(t) = F(t, y(t)), \quad t \in (a, b) \quad \text{System mit } n \text{ Komponenten}$$

$$\left. \begin{array}{l} n \text{ Randwerte (RW)} \\ y_i(a) = \alpha_i \quad i \in I_a \quad I_a^c = \{i_1, \dots, i_m\} \\ y_i(b) = \beta_i \quad i \in I_b = \{i_1, \dots, i_m\} \end{array} \right\}$$

Beispiel

$$\begin{array}{c} \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_5 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{c} a \text{-----} b \end{array} \quad \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_4 \\ \beta_5 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{l} I_a = \{2, 3, 5\} \\ I_a^c = \{1, 4\} \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{durch} \\ \text{Sprung} \end{array} \quad \begin{array}{l} I_b = \{1, 5\} \end{array} \end{array}$$

Gebe ANP mit $y(a) =$

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_3 \\ \alpha_5 \end{pmatrix}$$

und bestimme $z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$ so, dass

$$y(b) = \beta_1, y_5(b) = \beta_5$$

2 Variablen

2 Gleichungen

"Schlußverfahren"

allgemein: $y(t, z)$ Lösung des AWP

$$y'(t) = F(t, y(t))$$

$$y_i(a) = \alpha_i \quad i \in I_a$$

$$y_{i_k}(a) = z_k \quad k=1, \dots, m$$

finde $z \in \mathbb{R}^m$ mit $G(z) = 0$

wobei

$$G_k(z) =$$

$$y_{i_k}(b, z) - \beta_{i_k}$$

$$k=1, \dots, m$$

Nullstellenproblem

... lösbar z.B. mit Newton-Verfahren

oder mit Optimierungverfahren

$$\|G(z)\| \xrightarrow{z \in \mathbb{R}^m} \min$$

jede Funktionsauswertung verlangt neue Lösung der DGL

Problemstellung 2: freie Randwertprobleme

$$y'(t) = F(t, y(t)), \quad t \in (a, b)$$

n Komponenten

n Randwerte

$$\begin{cases} y_i(a) = \alpha_i & i \in I_a \\ I_a^c = \{i_1, \dots, i_m\} \end{cases}$$

$$y_i(b) = \beta_i \quad i \in I_b = \{i_1, \dots, i_m\}$$

1 Randbedingung $y(y(a)) = 0$

finde $z \in \mathbb{R}^m$, $b > a$ mit $G(b, z) = 0$ wobei $G_0(b, z) = \psi(y(a, z))$
 $\underbrace{m+1 \text{ Unbekannte}}_{m+1 \text{ Gleichungen}} \quad G_k(b, z) = \underbrace{\chi_k(b, z) - \beta_{z_k}}_{k=1, \dots, m}$

Newton-Verfahren / Optimumverfahren brauchen ∇G

Problemstellung 1: $G_k(z) = \chi_k(b, z) - \beta_{z_k}$

$$\frac{\partial}{\partial z_j} G_k(z) = \frac{\partial}{\partial z_j} \chi_k(b, z)$$

brauche Ableitung der Lsg von $y'(t) = F(t, y(t))$

$$\begin{cases} y'(a) = x_0 & x_0 \in I_a \\ y_{z_k}(a) = z_k & k=1, \dots, m \end{cases}$$

nach Startwert konvergieren

Berechnung durch Lösung eines weiteren AWP:

für festes z nenne $D_{ij}(t) := \frac{\partial}{\partial z_j} y_i(t, z)$ wir brauchen $D_{ij}(b) = \frac{\partial}{\partial z_j} g_k(z)$

Eintrag kj
der
Jacobian

mit Wissen $D_{ij}(a) = \frac{\partial}{\partial z_j} y_i(a, z) = \begin{cases} \frac{\partial}{\partial z_j} g_k = \delta_{kj} & i = i_k \in I_a^c \\ \frac{\partial}{\partial z_j} \bar{x}_i = 0 & i \in I_a \end{cases}$

und $\frac{d}{dt} D_{ij}(t) = \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial z_j} y_i(t, z) = \frac{\partial}{\partial z_j} \frac{d}{dt} y_i(t, z) = \frac{\partial}{\partial z_j} F_i(t, y(t, z))$

$$= \sum_{k=1}^n \underbrace{\frac{\partial}{\partial y_k} F_i(t, u)}_{M_{ik}(t, u)} \bigg|_{u=y(t, z)} \underbrace{\frac{\partial}{\partial z_j} y_k(t, z)}_{D_{kj}(t)} = \sum_k M_{ik}(t, y(t, z)) D_{kj}(t)$$

kurz $\begin{cases} y'(t) = F(t, y(t)) \\ D'(t) = M(t, y(t)) D(t) \end{cases} \quad \begin{matrix} y_i(a) = x_i & i \in I_a & y_{i_k}(a) = z_k & k=1, \dots, m \\ D_{ij}(a) = 0 & i \in I_a & D_{i_k j}(a) = \delta_{kj} & k=1, \dots, m \end{matrix}$

erweitertes AWP zur Berechnung von $y(t, z)$ und $\frac{\partial}{\partial z_j} y(t, z)$

Problemstellung 2:

$$G_0(b, z) = \gamma(\gamma(q, z))$$

$$G_k(b, z) = \gamma_k'(b, z) - \beta_k$$

$$\frac{\partial}{\partial b} G_0(b, z) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial z_j} G_0(b, z) = \sum_i \frac{\partial}{\partial u_i} \gamma(u) \Big|_{u=\gamma(q, z)} \frac{\partial}{\partial z_j} \gamma_k(q, z) = \frac{\partial}{\partial u_{ij}} \gamma(u) \Big|_{u=\gamma(q, z)}$$

$\frac{\partial}{\partial z_j} G_k(b, z)$ wie in Problemstellung 1

bleibt noch: $\frac{\partial}{\partial b} G_k(b, z) = \frac{\partial}{\partial b} \gamma_k'(b, z) = \gamma_k'(b, z) = \overline{F}_{k, \gamma_k}(b, \gamma(b, z)) \quad k=1, \dots, m$

also wieder ∇G berechenbar mit Lösung des erweiterten AWP

praktischer Zugang zur Lösung von $G(w) = 0$

↓
Problestellung 1: $w = z$

Problestellung 2: $w = (z, z)$

Newton Verfahren:

$$w^{k+1} = w^k + d^k$$

mit

$$\nabla G(w^k) d^k = -G(w^k)$$

bestimme Startvektor w^0 z.B. durch Approximation

"gerader Schuss"

berechne $\nabla G(w^k)$, $G(w^k)$ durch Lösung

der AWP's (*)



Schwerichtung aus

gerader Verbindung Start $\rightarrow$ Ziel

Geschwindigkeit bzw. Dauer

berechnet durch Entfernung

und Dauer bzw. Geschwindigkeit