# Kapitel 5 : Auswahlkriterium : Stabilität bei Langzeitsimulation

wir betrachten die Modellgleichung : $\dot{y}(t) = My(t) \qquad y(0) = x_0$

exakte Lösung : $y(t) = \exp(tM)\, x_0$

auf äquidistantem Gitter :

$$y(t_{k+1}) = \exp((t_k + h)M)\, x_0 = \exp(hM)\exp(t_k M)\, x_0 = \underbrace{\exp(hM)}_{\text{feste Matrix } B_{ex}}\, y(t_k)$$

exakte Lösung erfüllt <u>lineare Iteration</u>

$$y(t_{k+1}) = B_{ex}\, y(t_k)$$

**Definition 5.1** Sei $B \in \mathbb{R}^{d \times d}$ und $\|\cdot\|$ sei eine Norm auf $\mathbb{R}^{d \times d}$.
Die lineare Iteration $z_{k+1} = B z_k$, $z_0 \in \mathbb{R}^{d \times 1}$ heißt

- stabil g.d.w. ein $C > 0$ existiert mit $\|B^k\| \leq C$ für alle $k \in \mathbb{N}$
- asymptotisch stabil g.d.w. $\lim_{k \to \infty} \|B^k\| = 0$

beachte: stabile Iteration kann nicht "explodieren", da

$$\|z_k\| = \|B^k z_0\| \leq \|B^k\| \, \|z_0\| \leq C \|z_0\| \quad \text{für alle } k$$

kompatible Vektornorm

bei asymptotischer Stabilität gilt sogar: $\|z_k\| \leq \|B^k\| \, \|z_0\| \xrightarrow[k \to \infty]{} 0$

Kriterium für (asympt.) Stabilität ?

**Satz 5.2** Die lineare Iteration $z_{k+1} = B z_k$ mit $B \in \mathbb{C}^{d \times d}$ ist genau dann stabil, wenn für den Spektralradius $\rho(B) \le 1$ gilt und alle Eigenwerte $\lambda \in \sigma(B)$ mit $|\lambda| = 1$ den Index $\operatorname{ind}(\lambda) = 1$ haben.

Sie ist genau dann asymptotisch stabil, wenn $\rho(B) < 1$ gilt.

Beweisgeschmack:

Fall $B$ diagonalisierbar: $\quad B U = U \Lambda \quad \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_d \end{pmatrix}$

(d.h. $\operatorname{ind}(\lambda) = 1$ für alle $\lambda$)

$U$: EV in Spalten; $\Lambda$: zugeh. EW auf Diagonale

dann $\quad B^k = (U \Lambda U^{-1})^k = U \Lambda U^{-1} U \Lambda U^{-1} U \Lambda U^{-1} \cdots U^{-1} U \Lambda U^{-1} = U \Lambda^k U^{-1} = U \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_d^k \end{pmatrix} U^{-1}$

$U$, $U^{-1}$: unabh. von $k$

also $\quad \|B^k\| \le C \|U\| \|U^{-1}\| \underbrace{\max_{i=1}^{d} |\lambda_i|^k}_{\rho(B)} = \tilde{C} \rho(B)^k$

und $\quad \rho(B)^k = \left\| \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_d^k \end{pmatrix} \right\|_\infty \le C \|U^{-1}\| \|U\| \|B^k\|$

$$\Rightarrow \quad c_1 \rho(B)^k \le \|B^k\| \le c_2 \rho(B)^k$$

Aussage ablesbar

Fall $B$ nicht diagonalisierbar ... gleiche Argumentation mit Jordanscher Normalform

benötigt letztlich den Fall: $B =$ Jordankästchen ...

Beispiel $B = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \underbrace{\lambda I} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}$ hier $\operatorname{ind}(\lambda) = 2$ (Dimension des größten Jordankästchens zum EW $\lambda$)

$$B^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^k (\lambda I)^{n-k} = (\lambda I)^n + \binom{n}{1} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} (\lambda I)^{n-1} = \begin{pmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & \lambda^n \end{pmatrix}$$

$\uparrow$

binom. Satz; beachte $\lambda I \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \lambda I$ ; $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = 0$

Ist $|\lambda| < 1$ : $B^n \to 0$

Ist $|\lambda| = 1$ : $\|B^n\|_\infty = n \longrightarrow \infty$ ($\boxtimes$)

Im Modellfall: $B_{ex} = \exp(hM)$ ist $\sigma(B_{ex}) = \{\exp(h\lambda) \mid \lambda \in \sigma(M)\}$

mit $ind_{B_{ex}}(\exp(h\lambda)) = ind_M(\lambda)$

also: $|\exp(h\lambda)| \leq 1 \iff \exp(h \operatorname{Re}\lambda) \leq 1 \iff \operatorname{Re}\lambda \leq 0$

exakte Lsg stabil $\iff \operatorname{Re}\lambda \leq 0$ und $ind(\lambda) = 1$ für $\lambda$ mit $\operatorname{Re}\lambda = 0$

exakte Lsg asympt. stabil $\iff \operatorname{Re}\lambda < 0$

Forderung: numerische Lösung soll gleiches Stabilitätsverhalten haben wie exakte Lösung

Beispiele: RK-Verfahren für $\dot{y} = My$ mit äquidistantem Gittern liefern lineare Iterationen

1) explizites Euler Verfahren

$$x(t_{n+1}) = x(t_n) + hMx(t_n) = (I + hM)\,x(t_n) = R(hM)\,x(t_n) \quad \text{mit } R(z) = z^0 + z^1 = 1+z$$

unterscheiden sich von $R_{ex}(z) = \exp(z)$ in $\mathcal{O}(z^2)$

2) implizites Euler Verfahren

$$x(t_{n+1}) = x(t_n) + hMx(t_{n+1}) \leadsto (I - hM)\,x(t_{n+1}) = x(t_n)$$

$$\rightarrow x(t_{n+1}) = (I - hM)^{-1} x(t_n) = \sum_{k=0}^{\infty} (hM)^k\, x(t_n) = R(hM)\,x(t_n) \quad \text{mit } R(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1-z}$$

3) RK 2 Verfahren

$$\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \hline & 0 & 1 \end{array}$$

$$x(t_{n+1}) = x(t_n) + h g_2$$

$$g_2 = M\left(x(t_n) + \tfrac{1}{2} h M x(t_n)\right) = Mx(t_n) + \tfrac{1}{2} h M^2 x(t_n)$$

$$\leadsto \quad x(t_{n+1}) = \left(I + hM + \tfrac{1}{2}(hM)^2\right) x(t_n) = R(hM)\,x(t_n) \quad \text{mit } R(z) = z^0 + z^1 + \tfrac{1}{2} z^2 = 1 + z + \tfrac{1}{2} z^2$$

unterscheiden sich vom $\exp(z)$ in $\mathcal{O}(z^3)$

4) implizite Mittelpunktregel

$$x(t_{n+1}) = x(t_n) + M\,\frac{x(t_{n+1}) + x(t_n)}{2} \rightsquigarrow \left(I - \tfrac{h}{2}M\right) x(t_{n+1}) = \left(I + \tfrac{h}{2}M\right) x(t_n)$$

$$\Leftrightarrow \quad x(t_{n+1}) = \left(I - \tfrac{h}{2}M\right)^{-1}\left(I + \tfrac{h}{2}M\right) x(t_n) = R(hM)\,x(t_n)$$

mit $$R(z) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^k \left(1 + \frac{z}{2}\right) = \frac{1+z/2}{1-z/2}$$

$$= \left(1 + \frac{z}{2} + \frac{z^2}{4}\right)\left(1 + \frac{z}{2}\right) + O(z^3) = 1 + z + \frac{z^2}{2} + O(z^3) = \exp(z) + O(z^3)$$

Beobachtung: RK Verfahren für $\dot{y} = My$ auf äquidistantem Gitter

liefern lineare Iterationen: $x(t_{n+1}) = R(hM)\,x(t_n)$

Konsistenzordnung

mit $R(z) = \exp(z) + O(h^{p+1})$

und $R$ — Polynom wenn Verfahren explizit
— Potenzreihendarstellung einer rationalen Funktion wenn Verfahren implizit