

Lemma 5.3 Sei $R(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ auf $|z| < r$, $z \in \mathbb{C}$ absolut konvergent

weiter sei $M \in \mathbb{C}^{n \times n}$ und $\rho(M) < r$ für ein $n > 0$.

Dann gilt $\sigma(R(M)) = R(\sigma(M))$

Beweis: (für diagonalisierbare Fall, ... sonst mit Jordanscher Normalform)

$v_1, \dots, v_n$ Basis aus EV mit EW $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ also $M v_i = \lambda_i v_i$ bzw $M^k v_i = \lambda_i^k v_i$

$$R(M) v_i = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (M)^k v_i = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \lambda_i^k M^k v_i = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \lambda_i^k \lambda_i^k v_i = R(\lambda_i) v_i$$

also $R(M)$ ebenfalls diagonalisierbar mit EW $R(\lambda_i)$ □
entscheidend für Stabilitätsverhalten ist $\rho(R(M)) = \max |R(\lambda_i)| \stackrel{\text{angew. stab.}}{\leq} 1$
kritisch

Definition 5.4. Sei $R(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ auf $|z| < r$, $z \in \mathbb{C}$.

Dann heißt

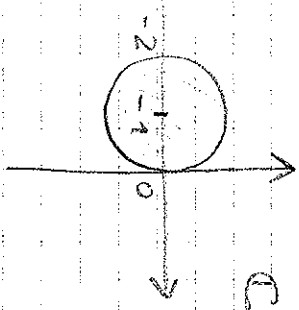
$$S_R = \{z \in \mathbb{C} \mid |R(z)| < 1\}$$

das gebiet der absoluten Stabilität zu R .

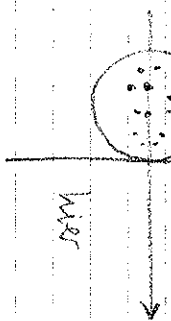
Stabilitätsgebiete zu verschiedenen Verfahren ... zeichne $S_R = \{z \in \mathbb{C} \mid |R(z)| \leq 1\}$

1) Euler explizit $R(z) = 1 + z$ $S_R = \{z \in \mathbb{C} \mid |z+1| \leq 1\}$

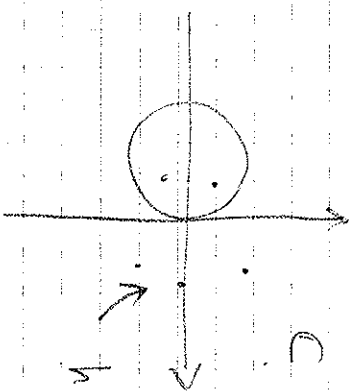
↑ Kreisgleichung:
 $|z - m| \leq r$



$h\sigma(H) \subset S_R$
 $\leadsto$ asympt. stabil

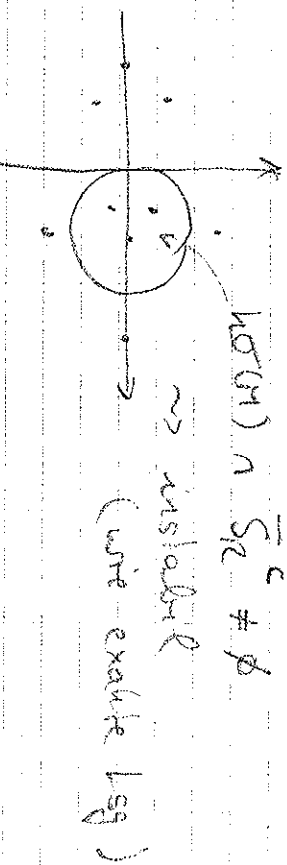
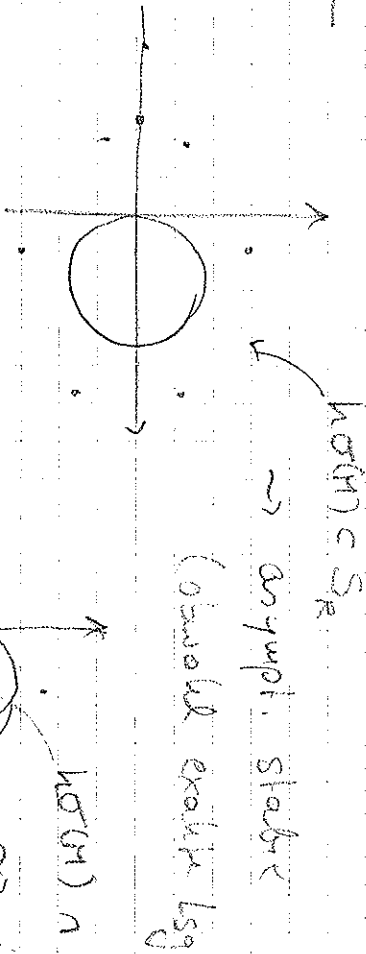
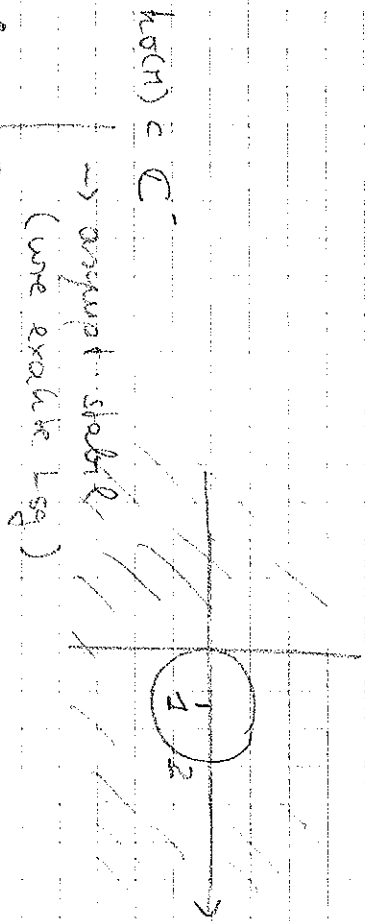


$h\sigma(H) \cap \overline{S_R}^c \neq \emptyset$
 $\leadsto$ instabil
 (obwohl hier exakte Lsg asympt. stabil,
 da $\sigma(H) \subset \mathbb{C}^-$)



$\leadsto$ instabil (wie exakte Lösung)

2) Euler Laplace $R(z) = \frac{1}{1-z}$ $S_R = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-1| \geq 1\}$



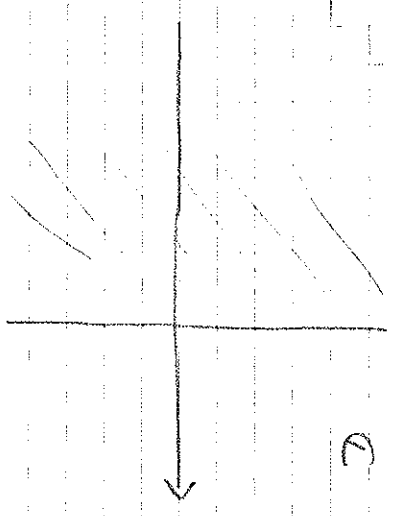
3) Routh Hurwitz regel $R(z) = \frac{1 + \frac{z}{2}}{1 - \frac{z}{2}}$

$$|R(z)| < 1 \Leftrightarrow \left| 1 + \frac{z}{2} \right| < \left| 1 - \frac{z}{2} \right| \Leftrightarrow \left| 1 + \frac{z}{2} \right|^2 < \left| 1 - \frac{z}{2} \right|^2$$

$$\Leftrightarrow 1 + (z + \bar{z}) + \frac{|z|^2}{4} < 1 - (z + \bar{z}) + \frac{|z|^2}{4}$$

$$\Leftrightarrow z + \bar{z} < 0 \Leftrightarrow \operatorname{Re} z < 0$$

also $S_R = \mathbb{C}^-$

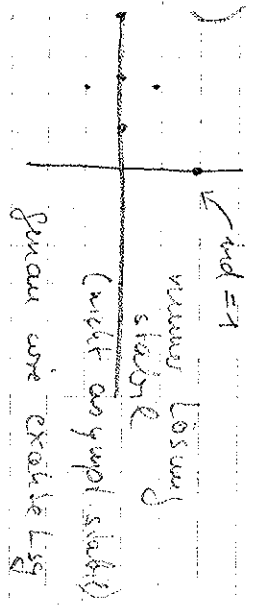
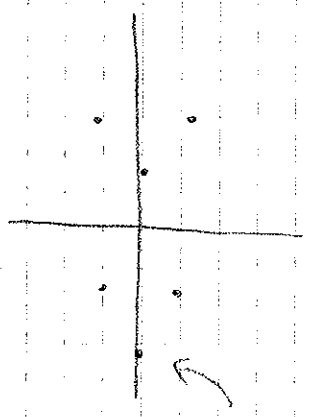


$\mathbb{C}$

$\operatorname{Im}(H) \in \mathbb{C}^-$

$\Rightarrow$ asympt. stable
(we exclude lsg)

$\operatorname{Im}(H) \cap S_R^c \neq \emptyset \rightarrow$ unstable
(we exclude lsg)



Das Verfahren "erbt" die asymptotische Stabilität der exakten Lösung

wenn $\mathbb{C} = \{s \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} s < 0\} \subset S_R$ gilt

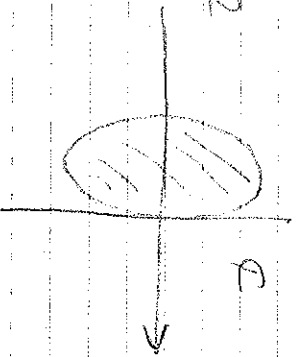
Definition 5.5 Sei $R(s) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ auf $|z| < r$.

Ein Verfahren $x(t_{n+1}) = R(hM)x(t_n)$, $h(M) < r$ heißt A-stabil wenn $\mathbb{C} \subset S_R$.

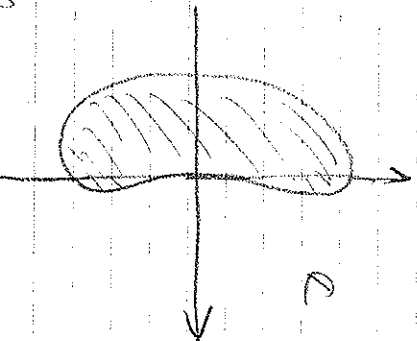
Beispiele: implizites Eulers Verfahren } A-stabil
explizite Runge-Kutta

Spezialbeispiele: explizites Eulerverfahren,

sogar RK2



und RK4



nicht A-stabil

Satz 5.6 Durch $R(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ auf $|z| < r$ sei ein A-stabiles Verfahren gegeben.

Dann ist die Lösung $x(t_{n+1}) = R(hM)x(t_n)$ mit $h(M) < r$ asymptotisch stabil, wenn die exakte Lösung von $\dot{y} = My$ asymptotisch stabil ist.

Satz 5.2

Beweis: exakte Lösung asympt. stabil $\Leftrightarrow \sigma(M) \subset \mathbb{C}^-$

$$\text{denn } h\sigma(M) \subset \mathbb{C}^- \quad \text{also } h\sigma(M) \subset S_R \quad \text{also } |R(h\sigma(M))| < 1$$

da $h > 0$ da Satz 5.4

$$\text{also (Lemma 5.3)} \quad \rho(R(hM)) < 1 \quad \text{also (Satz 5.2)} \quad x(t_{n+1}) = R(hM)x(t_n)$$

asymptotisch stabil



beachte: bei expliziten RK-Verfahren ist R ein Polynom und damit ist A-Stabilität ausgeschlossen, denn:

Lemma 5.7. Sei $R(z) = 1 + z + a_2 z^2 + \dots + a_k z^k$ mit $a_2, \dots, a_k \in \mathbb{R}$, $a_k \neq 0$

Dann ist das absolute Stabilitätsgebiet zu R beschränkt
und das Verfahren $x_{i+1} = R(hM) x_i$ kann nicht A-stabil sein.

Beweis: Ann S_R unbeschränkt

Wähle $(z_n)_{n \in \mathbb{N}} \in S_R$ mit $|z_n| \rightarrow \infty$

$$1 > |P(z_n)| = |z_n|^k \left| \sum_{m=0}^{k-1} a_k |z_n|^{m-k} + a_k \right| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty \quad \text{w-} \quad \text{w-}$$

$$k \geq 1 \quad \xrightarrow{n \rightarrow \infty} |a_k| > 0$$

nach Vor.

Merksatz: eine qualitative Eigenschaft "asymptotische Stabilität"

der exakten Lösung nicht zu verifizieren werden A-stabile
(und damit Implizite) Verfahren benötigt