

Kapitel 6: Konvergenz linearer Mehrschrittverfahren

Lineare Mehrschrittverfahren entstehen aus der Vorschrift

$$(*) \quad X_k X(t_{n+k}) + \alpha_{k-1} X(t_{n+k-1}) + \dots + \alpha_0 X(t_n) = h(\beta_k F(t_{n+k}, X(t_{n+k})) + \dots + \beta_0 F(t_n, X(t_n)))$$

auf äquivalenten Gittern $G = \{a + nh \mid 0 \leq n \in \mathbb{N}, n = \frac{b-a}{N}\}$ $N \in \mathbb{N}_{\geq k}$

1) zugehörige Verfahrensformeln

Ist $\alpha_k \neq 0$ entspricht Berechnung von $X(t_{n+k})$ einem FFP-Problem

$$\Xi = \Phi(\Xi, \tilde{X}(t_n)) \quad \text{mit} \quad \tilde{X}(t_n) = \begin{pmatrix} X(t_{n+k-1}) \\ \vdots \\ X(t_n) \end{pmatrix}$$

$$\text{und} \quad \Phi(\Xi, \tilde{X}(t_n)) = \varphi(\tilde{X}(t_n)) + h \beta_k' F(t_{n+k}, \Xi)$$

$$\varphi(\beta) = \sum_{j=0}^{k-1} \alpha_j' z_j + h \beta_j' F(t_{n+j}, z_j)$$

$\nwarrow \frac{\alpha_j}{\alpha_k}$ $\nwarrow \frac{\beta_{kj}}{\alpha_k}$
 $\nearrow$

wobei $\beta = \begin{pmatrix} \beta_{k-1} \\ \vdots \\ \beta_0 \end{pmatrix}$

Da $\forall \xi \phi(\xi, \tilde{x}(t_n)) = h \beta_e' \underbrace{\nabla F(t_{n+1}, \xi)}_{\text{gem. beschränkt, wenn } F \text{ Lip-stetig}}$

$\leadsto \phi$ ist Kontraktion auf $\mathbb{R}^{d+1}$ wenn $h \|\beta_e'\| \cdot L < 1$

Wie in Kap 2. es gibt eindeutigen $\tilde{x} = g(\tilde{x}(t_n))$ mit g Lip-stetig

$$d.h. \quad x(t_{n+1}) = g(x(t_n)) = \phi(\tilde{x}(t_n)) + h \beta_e' F(t_{n+1}, g(\tilde{x}(t_n)))$$

$$d.h. \quad \text{Verfahrensformulation ist } V(t_{n+1}, x) = \underbrace{g(\tilde{x}(t_n)) - x(t_{n+1}))}_h \quad \text{für } n \geq 0$$

$V_n(t_j, x)$ $0 \leq j \leq k$ ergibt sich aus dem
Verfahren für die Kruftaufrechnung

2) Diskrete Iterationsverfahren

→ exakte Lsg

$$\begin{aligned} \text{Sei } \delta_n &:= \alpha_n y(t_{n+1}) + \dots + \alpha_0 y(t_n) - h_n (\beta_0 F(t_n, y(t_n)) + \dots + \beta_0 y'(t_n)) \\ &= \alpha_n y(t_{n+1}) + \dots + \alpha_0 y(t_n) - h_n (\beta_0 y'(t_{n+1}) + \dots + \beta_0 y'(t_n)) \\ &=: L_n(y, t_n, h) \end{aligned}$$

$$\text{d.h. } y(t_{n+1}) = \Phi(y(t_n), y'(t_n)) + \frac{1}{\alpha_n} \delta_n$$

$$\text{und } g(y(t_n)) = \Phi(g(y(t_n)), y'(t_n))$$

$$\text{mit } y(t_n) = \begin{pmatrix} y_1(t_{n+1}) \\ \vdots \\ y_i(t_n) \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \|g(y(t_n)) - y(t_{n+1})\| &\leq \|\Phi(g(y(t_n)), y'(t_n)) - \Phi(y(t_n), y'(t_n))\| + \frac{1}{\alpha_n} \|\delta_n\| \\ &\leq q \|g(y(t_n)) - y(t_n)\| + \frac{1}{\alpha_n} \|\delta_n\| \end{aligned}$$

$$\text{also } \|g(y(t_n)) - y(t_{n+1})\| \leq \frac{C}{(1-q)^{n+1}} \|\delta_n\|$$

← lokale Diskretisierungfehler

und damit
$$\left\| \frac{\delta_\delta Y(t_{n+1})}{h} - Y_\delta(t_{n+1}, Y) \right\|$$

$$= \left\| \frac{1}{h} \left(Y(t_{n+1}) - g(Y(t_n)) \right) \right\| = \frac{c}{1-q} \frac{1}{h^q} \|\delta_n\|$$

3) Trick: Umformung der Iteration als Blockmatrixform zur
Vektordarstellung

$$\vec{x}(t_{n+1}) = A \vec{x}(t_n) + h G(t_n, \vec{x}(t_n))$$

$$\begin{pmatrix} -\alpha_{k+1}' I & -\alpha_{k+1}' I & \dots & -\alpha_0' I \\ I & 0 & \dots & 0 \\ 0 & I & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ I & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_k' F(t_n + h, g(\vec{x}(t_n))) + \sum_{j=0}^{k-1} \beta_j' F(t_n + h_j, x(t_n, y_j)) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

exakte Lsg: $\vec{y}(t_{n+1}) = \underbrace{A \vec{y}(t_n) + h G(t_n, \vec{y}(t_n))}_{g(\vec{y}(t_n))} + \underbrace{\begin{pmatrix} g(t_{n+1}) - g(t_n) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}_{\tau_n}$

$$\begin{pmatrix} g(\vec{y}(t_n)) \\ y(t_{n+1}) \\ y(t_{n+1}) \\ y(t_{n+1}) \end{pmatrix}$$

$$e_n = \tilde{x}(t_n) - y(t_n) \quad \text{Fehler}$$

$$e_n = A e_{n-1} + \underbrace{h(\tilde{G}(t_n) - G(t_n))}_{\Delta G_n} - r_{n-1}$$

$$\|r_{n-1}\| \leq \frac{C}{(1-q)^n} \|s_{n-1}\|$$

$$= A^2 e_{n-2} + A(h \Delta G_{n-2} - r_{n-2}) + h \Delta G_{n-1} - r_{n-1}$$

$$= \dots = A^n e_0 + \sum_{k=1}^n A^{n-k} (h \Delta G_{k-1} - r_{k-1})$$

gibt Abschätzung möglich, wenn $\|A^n\| \leq C$ für alle $n \in \mathbb{N}$

Stabilitätskriterium

$$\text{dann } \|e_n\| \leq C \|e_0\| + \sum_{k=0}^{n-1} \hat{C} h L \|e_k\| + \sum_{k=0}^{n-1} C \|r_k\|$$

$$\text{mit Lemma von Gronwall } \|e_n\| \leq C(\|e_0\| + \sum_{k=0}^{n-1} \|r_k\|) e^{C(b-a)}$$

Fehler der Startphase	akkumulierter lokaler Fehler	$\leq \frac{(b-a)C}{(1-q)^n} \frac{1}{n} \max_{k=0}^{n-1} \ s_k\ $
--------------------------	---------------------------------	--