

Satz 6.1: Wir betrachten das lineare Randwertwertproblem (*) zu einem AWP $\mathcal{W}$, das die lokale Lipschitz-Bedingung mit $L > 0$ erfüllt.

a) Durch (*) und aus jedem äquidistanten Filter G mit $\alpha_n = \frac{1}{n}$ $\leq \frac{1}{L \cdot \beta_n}$ ($0 < n < \infty$ falls $\beta_n > 0$) eine Verfahrensfolge an definiert und damit ausgenutzt an Approximationsverfahren X

b) Ist die lineare Iteration $u_{n+1} = A u_n$ stabil mit $A = \frac{1}{\alpha_n} \begin{pmatrix} \alpha_{n-1} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_{n-2} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_1 \end{pmatrix}$

dann gilt die Fehlerabschätzung zur exakten Lösung y

$$\|x_n - y\|_G \leq K \left(\max_{j=0}^{n-1} \|x_n(t_j) - y(t_j)\| + \frac{1}{n} \max_{j=0}^{n-1} \|L(y, t_j, u_j)\| \right)$$

c) $\|x_n(t_j) - y(t_j)\| \leq C n^p$ für $j=0, \dots, k-1$

und $\|L(y, t_j, u_j)\| \leq C n^{p+1}$ für $j=0, \dots, n-k$

dann konvergiert α gegen $\mathcal{W}$ von Ordnung p wenn $u_n = A u_n$ stabil ist

4) Umformulierung des Stabilitätskriteriums

Definition 6.2 Das lineare Routh-Hurwitz Verfahren (*)

Wird stabil (bzw 0-stabil bzw D-stabil) wenn
 die lineare Operation $u_{k+1} = A u_k$ stabil ist mit $A = \begin{pmatrix} -\alpha'_1 & 1 & \dots & -\alpha'_k & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -\alpha'_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -\alpha'_k \end{pmatrix}$ $\alpha'_i = \alpha_i / \alpha_k$

Bem: $\chi(t_{n+1}) = A \chi(t_n)$ liefert die approximative Lösung im Fall $F \neq 0$
 d.h. 0-stabile Verfahren sind stabil im Fall $F=0$

Lemma 6.3 $\mathcal{O}(A)$ enthält genau die Nullstellen des Polynoms $P(\xi) = \alpha_k \xi^k + \dots + \alpha_1 \xi + \alpha_0$

Beweis: Sei $\lambda \in \mathcal{O}(A)$ dann gilt es $V = \begin{pmatrix} v_{k-1} \\ \vdots \\ v_0 \end{pmatrix} \neq 0$ mit $AV = \lambda V$

dann
$$\begin{aligned} v_1 &= \lambda v_0 \\ v_2 &= \lambda v_1 = \lambda^2 v_0 \\ &\vdots \\ v_{k-1} &= \lambda^{k-1} v_0 \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} v_1 &= \lambda v_0 \\ v_2 &= \lambda v_1 = \lambda^2 v_0 \\ &\vdots \\ v_{k-1} &= \lambda^{k-1} v_0 \end{aligned}} \right\} \text{ also } v_0 \neq 0 \text{ da } v \neq 0$$

und
$$-\alpha_{k-1} \lambda^{k-1} - \dots - \alpha_0 v_0 = \lambda v_{k-1} = \lambda^k v_0$$

also
$$P(\lambda) v_0 = 0 \quad \text{also } \lambda \text{ Nullstelle von } P$$

umgekehrt: ist λ Nullstelle von P und $v_0 \neq 0$ dann ist

Eigenvektor von A zum EW λ
$$\begin{pmatrix} \lambda^{k-1} v_0 \\ \vdots \\ v_0 \end{pmatrix} \quad \text{da } v_0 \neq 0$$

Lemma 6.3. Ist λ einfache Nullstelle von P

$$\text{dann ist } \text{ord}_A(\lambda) = 1$$

Beweis: Sei $\text{ord}_A(\lambda) \geq 2$ dann gilt es $v \neq 0$ $Av = \lambda v \leadsto \lambda$ Nullstelle von P

$$\text{und } w \text{ mit } Aw = \lambda w + v \leadsto \lambda \text{ Nullstelle von } P'$$

wie in Lemma 6.2.

□

Satz 6.4. (Stabilitätsbedingung)

Hat $P(\xi) = \alpha_k \xi^k + \dots + \alpha_1 \xi + \alpha_0$ alle Nullstellen im Einheitskreis $\overline{B_1(0)}$ und sind die Nullstellen auf $\partial B_1(0)$ einfach, dann ist das Anneau $\mathbb{R}[x]/(P(x))$ 0-stabil.

Beweis: Satz 5.2 mit Lemma 6.2, 6.3

Beispiel: Adams-Verfahren

$$X(t_{n+k}) = X(t_n) + h \sum_{j=0}^5 \beta_j F(t_n + \gamma_j, X(t_n + \gamma_j))$$

$$\alpha_k = 1, \quad \alpha_{k+1} = -1$$

$$\xi^k - \xi^{k-1} = \xi^{k-1} (\xi - 1)$$

einfache Nullstelle

multiple Nullstelle bei $\xi = 0$

$\sigma(A) = \{0, 1\}$ Nullstelle bei 1 einfach

$\zeta \mapsto 0$ -stabil

Beispiel: Nyström / Milne-Simpson Methoden

$$X(t_{n+k}) = X(t_{n+k-2}) + h(\dots)$$

$$\hookrightarrow P\left(\frac{z}{h}\right) = \sum_{k=0}^n a_k z^{k-2} = \sum_{k=0}^n a_k \left(\frac{z}{h}\right)^{k-2} = \sum_{k=0}^n a_k \left(\frac{z}{h} + 1\right) \left(\frac{z}{h} - 1\right)$$



anfache Nullstellen

auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

$\hookrightarrow$ 0-stabile

Beispiel: BDF ... stabil bis $k=6$, instabil ab $k=7$