

Kapitel 7: Verfahren mit Erhaltungseigenschaften

$$\text{Eine DGL } \dot{y} = F(y)$$

heißt Hamiltonsches System wenn

$$1) \quad y = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2n}$$

$$2) \quad F(y) = \begin{pmatrix} -\nabla_q H \\ \nabla_p H \end{pmatrix} \quad H: \text{Hamiltonsche Funktion (stetig differenzierbar)}$$

Lemma 7.1. Sei y Lösung eines Hamiltonschen Systems mit Hamiltonfunktion H

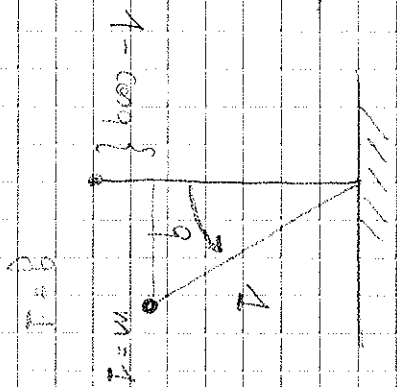
Dann ist $t \mapsto H(y(t))$ konstant, d.h. H ist eine Erhaltungsgroße der Differentialgleichung

$$\text{Beweis: } \frac{d}{dt} H(y(t)) = \nabla H(y(t)) \cdot \dot{y}(t) = \nabla_p H(y(t)) \cdot (-\nabla_q H(y(t))) + \nabla_q H(y(t)) \cdot \nabla_p H(y(t))$$

$$= 0$$

Satz 7.2: Gibt es auch numer. Verfahren mit Erhaltungseigenschaften? $H(x(t_n)) = H(x(t_0))$?

Beispiel: Pendel



$$m=1$$

$$H(p, q) = \frac{1}{2} p^2 + 1 - \cos q \quad \text{Lagrangefunktion}$$

kinetische Energie
potentielle Energie

zugehöriges Hamiltonsches System:

$$\left. \begin{aligned} \dot{p} &= -(\sin q) \\ \dot{q} &= p \end{aligned} \right\} \quad q + \sin q = 0$$

"Pendelgleichung"

Mit betrachten im nächsten lineare Hamiltonsysteme

$$dH = \nabla H(q) = G(y)$$

$$\text{mit} \quad \frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_j} H = \frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_j} \left(\frac{1}{2} \sum_k G_{kk} y_k^2 \right) = \frac{\partial}{\partial y_i} \sum_k G_{kk} y_k$$

also G symmetrisch

G_{ii}

G_{ii}

wird damit: $H(y) = \frac{1}{2} y^T G y + \gamma$ oder $\gamma = 0$

als Blockmatrix $G = \begin{pmatrix} A & C \\ C^T & B \end{pmatrix}$ mit A, B symmetrisch

Für lineare Gleichungssysteme gilt also

$$F(y) = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix}}_{J^T} \nabla H(y) = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & C \\ C^T & B \end{pmatrix} y = \begin{pmatrix} -C^T & -B \\ A & C \end{pmatrix} y$$

mit A, B symmetrisch

Die Matrix $J = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}$ spielt eine wichtige Rolle in der Theorie

es gilt: $J^T J = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} = I$ d.h. $J^T = J^{-1}$

und $J^2 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} = -I$] ist Matrixversion von $-Id$

also: $\nabla H(y) = H$ zu Gleichungssystem $y = My$ ist $\nabla H(y) = \frac{1}{2} y^T J M y$

Lemma 7.2 Sei $\dot{y} = Hy$ ein Hamiltonsystem und sei $\rho(h, t)$ für ein $h > 0$ im

Konvergenzbereich von $R(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$

Dann gilt $J R(H) = R(-H) J$

Beweis: Es ist $JH = J(J^T G) = G = G^T = -G^T J J = -H^T J$

$$\text{also } JH^k = -H^T JH^{k-1} = \dots = (-H^T)^k J$$

$$\text{also } J \sum_{k=0}^{\infty} a_k h^k H^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k h^k (-H^T)^k J \quad \square$$

Anwendung auf $R(z) = \exp(z)$

$$\text{ist also } J \exp(H) = \exp(-H) J^T$$

$$\text{außerdem ist } \exp(-H) \exp(H) = I$$

$$\text{so dass } \exp(H)^T J \exp(H) = \exp(H) \exp(-H) J = J \quad \text{"Mourski-Matrix ist symplektisch"}$$

Man sieht die Erhaltungseigenschaft...

Definition 7.3: Eine Matrix $K \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ heißt symplektisch, falls $K^T J K = J$

Ein Verfahren, das für lineare Gleichungen $\dot{y} = Hy$ durch eine

Stechansmatrix $R(t, t_0)$ beschreiben ist mit $R(0) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} H^k$

heißt linear symplektisch, falls $R(t, t_0)$ symplektisch ist wenn

$\dot{y} = Hy$ ein Hamiltonsystem ist. Das Verfahren heißt linear erhaltend, wenn $H(R(t, t_0)y_0) = H(y_0)$ für jeden $y_0 \in \mathbb{R}^{2n}$ und jedes lineare Hamiltonsystem $\dot{y} = Hy$ gilt, wobei H die zugehörige Hamiltonfunktion ist.

Satz 7.4: Ein Verfahren ist genau dann linear erhaltend, wenn es linear symplektisch ist.

Dies ist genau dann der Fall, wenn $R(-s)R(s) = I$ gilt, wobei $R(t, t_0)$ die Stechansmatrix des Verfahrens ist.

Beweis: Das Verfahren sei linear symplektisch. Dann gilt

$$H(R(t, t_0)y_0) = \frac{1}{2} (R(t, t_0)y_0)^T J H R(t, t_0)y_0 = \frac{1}{2} y_0^T R(t, t_0)^T J R(t, t_0) H y_0 = \frac{1}{2} y_0^T J H y_0 = H(y_0)$$

↖ kommutativ ↘ symplektisch

Das Verfahren sei linear stabilisiert, dann gilt

$$0 = H(R(h) y_0) - H(y_0) = \frac{1}{2} y_0^T \underbrace{(R(h)^T J H R(h) - J H)}_{\text{symm}} y_0 \quad \text{für alle } y_0 \in \mathbb{R}^{2n}$$

$$\Rightarrow 0 = R(h)^T J H R(h) - J H = (R(h)^T R(-h)^T - I) J H$$

speziell für $G=I$ d.h. $H=J^T$: $R(h) J R(-h) = I$

nutze $J^0 = I \quad J^1 = J \quad J^2 = -I \quad J^3 = -J \quad J^4 = I$

und $\lambda^0 = 1 \quad \lambda^1 = \lambda \quad \lambda^2 = -1 \quad \lambda^3 = -\lambda \quad \lambda^4 = 1$

$$\text{mit } A(z) := \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k z^{2k} \quad B(z) := \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k b_k z^{2k+1}$$

$$R(z) = A(z)I + B(z)J$$

$$R(h) = A(h)I + B(h)J$$

$$R(-h) = A(h)I - B(h)J$$

$$I = R(h) R(-h) = (A(h)^2 - B(h)^2) I$$

also $1 = A(h)^2 - B(h)^2 = R(h) R(-h)$

d.h. $z \mapsto R(z) R(-z)$ ist 1 auf Menge mit HP in $\mathbb{C}$ und Uniform

d.h. $R(z) R(-z) = 1$

Für eine diagonalisierbare Matrix M gilt dann $U^{-1}MU = \Lambda$

$$\text{also } R(M)R(-M) = R(U^{-1}U^{-1}U^{-1})R(-U^{-1}U^{-1}U^{-1}) = U^{-1}R(M)R(-M)U^{-1} = U^{-1}U^{-1} = I$$

Für eine allgemeine Matrix M mit $U^{-1}MU = \tilde{\Lambda}$ Jordannormatrix
sei $\rho(M) < r$ wobei r der Konvergenzradius von R

$$\text{Dann gilt es } 1 > \delta > 0 \text{ mit } \rho(M) + h\delta < r$$

wird $\varepsilon_0 < \delta$, so dass $\tilde{\Lambda} = \tilde{\Lambda} + \text{diag}(\varepsilon, \varepsilon^2, \varepsilon^3, \dots, \varepsilon^n)$ paarw. verschiedene Diagonaleinträge
hat für jedes $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$

$$\text{Dann ist } M_\varepsilon = U \tilde{\Lambda}_\varepsilon U^{-1} \text{ diagonalisierbar und } \rho(M_\varepsilon) < r \text{ und } M_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} M$$

$$\text{also } I = R(M_\varepsilon)R(-M_\varepsilon) \rightarrow R(M)R(-M)$$

$$\text{also } R(M)^T R(M) = R(M)^T R(-M)^T = I \quad \square$$

beendet

Beispiel

Euler explizit

$$R(z) = 1 + z$$

$$R(z)R(-z) = 1 - z^2 \neq 1$$

nicht Runge-Kutta

Euler implizit

$$R(z) = \frac{1}{1-z}$$

$$R(z)R(-z) = \frac{1}{1-z^2} \neq 1$$

— 11 —

Midpointregel

$$R(z) = \frac{1 + \frac{z^2}{2}}{1 - \frac{z^2}{2}}$$

$$R(z)R(-z) = \frac{1 - \frac{z^2}{4}}{1 - \frac{z^2}{4}} = 1$$

Runge-Kutta

allgemein

$R(z)$ Polynom

$\rightarrow$

$$z \mapsto R(z)R(-z)$$

Polynom

wird

$$R(z) = 1 + z + \dots$$

$$R(z)R(-z) = 1 \quad \text{Runge-Kutta} \quad R(z) = 0, \quad a^2 = 1$$

also:

explizite RK-Verfahren

sind

nicht

symplektisch

!

Beispiel

Stufe 4. Ordnung

$$R(z) = \frac{1 + \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{4!}}{1 - \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{4!}}$$

$$R(z)R(-z) = 1$$

allgemein

alle

Stufe-Verfahren

sind

symplektisch