Universität Konstanz
FB Mathematik & Statistik
Prof. Dr. M. Junk
J. Budday

Ausgabe: 23.04.2012

Abgabe: 30.04.2012
bis spätestens 10 Uhr
in die Briefkästen vor F441

Übungen zur Veranstaltung Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen

Blatt 01

Aufgabe 1: Verkehrsflussmodell

Im Folgenden betrachten wir ein Modell eines Verkehrsflusses von $N \in \mathbb{N}$ Fahrzeugen, die hintereinander herfahren. Das Modell basiert zunächst auf der Annahme einer einspurigen Straße, welche durch die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ gegeben sei (d.h. Überholen ist nicht möglich). Die Position des i-ten Fahrzeugs (d.h. der Mittelpunkt des Fahrzeugs) zur Zeit t soll durch $x_i(t) \in \mathbb{R}$ beschrieben werden. Demnach ist die Verkehrslage zum Zeitpunkt t durch den Vektor $x(t) \in \mathbb{R}^N$ gegeben. Für alle Zeiten zu beachten ist dabei die Zusatzbedingung $x_i < x_{i+1}$ für alle $i = 1, \ldots, N-1$. Desweiteren betrachten wir zur Vereinfachung nur Autos derselben Länge $l > 0$.

Physikalisch ist die Geschwindigkeit v_i des i-ten Fahrzeugs durch die zeitliche Änderung des Ortes x_i gegeben, d.h. es gilt $v_i(t) = \dot{x}_i(t)$. Analog ist die Beschleunigung a_i gegeben durch die zeitliche Änderung der Geschwindigkeit, d.h. es gilt $a_i(t) = \dot{v}_i(t) = \ddot{x}_i(t)$. Sind die Beschleunigungen aller beteiligten Fahrzeuge bekannt, so kann die Dynamik des Systems komplett beschrieben werden. Von was hängt die Beschleunigung des einzelnen Fahrzeugs also ab? Je nach Charakter des einzelnen Fahrers kann es zu unterschiedlichen Vorstellungen kommen, wie die Größe des Abstandes zum vorherfahrenden Fahrzeugs zu wählen ist. Um in der Lage zu sein, eine Verkehrsmodellierung mit unterschiedlichen Fahrertypen zu betrachten, sollte die Größe des gewünschten Abstandes g_i des i-ten Fahrers zum vorherfahrenden Fahrzeug bei eigener Geschwindigkeit v_i berücksichtigt werden. Im Folgenden gehen wir von einem linearen Zusammenhang $g_i(v_i) = \alpha_i v_i$ aus, wobei $\alpha_i > 0$ den Charakter des Fahrers beschreibt (der klassische Sonntagsfahrer hat also ein großes, der Dränglertyp hingegen ein kleines α_i). Bezeichnen wir mit d_i den tatsächlichen Abstand des i-ten Fahrzeugs zum vorherfahrenden Auto, so gibt die Differenz $d_i - g_i(v_i)$ an, ob das i-te Fahrzeug beschleunigen kann oder abbremsen muss. Denn ist $d_i - g_i(v_i) > 0$, so wird der Fahrer solange beschleunigen bis $d_i = g_i(v_i)$ gilt. Ist umgekehrt $d_i - g_i(v_i) < 0$, so muss der Fahrer abbremsen, da er näher als gewünscht auf das vorherfahrende Auto aufgefahren ist. Durch die Einführung des zusätzlichen Parameters c_i, der für die Stärke der Reaktion des einzelnen Fahrers auf die Diskrepanz zum gewünschten Abstand stehen soll, kann die Beschleunigung der ersten $N-1$ Autos mit diesem Modell etwa durch $a_i = c_i\big(d_i - g_i(v_i)\big)$ beschrieben werden. Da wir nur eine endliche Anzahl an hintereinander herfahrenden Fahrzeugen betrachten, hat das Führungsfahrzeug ($i = N$) selbst kein vorherfahrendes Fahrzeug, nach dem es seinen Abstand und dadurch seine Geschwindigkeit regeln muss. Für das Führungsfahrzeug benötigt man deshalb zum Beispiel eine explizite Geschwindigkeitsvorgabe. Dadurch wird dann die Dynamik der hinterherfahrenden Fahrzeuge automatisch beeinflusst.

(a) Formulieren Sie eine Differentialgleichung zweiter Ordnung für die Position x_i des i-ten Fahrzeugs ($i = 1, \ldots, N-1$) in Abhängigkeit des tatsächlichen Abstandes d_i des i-ten Fahrers zum vorausfahrenden Fahrzeug, des gewünschten Abstandes $g_i(v_i)$ und der Stärke der Reaktion des einzelnen Fahrers auf die Diskrepanz zum gewünschten Abstand und wandeln Sie diese DGL in ein System erster Ordnung in Matrix-Vektor-Form um. **(schriftlich)**

(b) Betrachten Sie im Fall $N = 2$ die Situation, dass ein Auto auf ein an einer roten Ampel stehendes Auto zufährt. Bestimmen Sie die exakte Lösung für diesen Fall und untersuchen Sie die verschiedenen Parameterbereiche. **(schriftlich)**

(c) Implementieren Sie den Fall aus (b) jeweils mit Hilfe des expliziten und des impliziten Euler-Verfahrens. Plotten Sie jeweils die Lösung und vergleichen Sie unterschiedliche Parametereinstellungen!