Universität Konstanz
FB Mathematik & Statistik
Prof. Dr. M. Junk
J. Budday

Ausgabe: 18.05.2012

Abgabe: 24.05.2012
bis spätestens **12** Uhr
in die Briefkästen vor F441

Übungen zur Veranstaltung
Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen

Blatt 03

Bitte kreuzen Sie die schriftlichen Teilaufgaben, die Sie in der Übungsgruppe vorrechnen könnten, direkt auf dem Übungsblatt an und geben Sie dieses mit ab.

Aufgabe 1: Konsistenzordnung (schriftlich)

☐ **(a)** Zeigen Sie, dass ein Taylor-Verfahren k-ter Ordnung für ein inhomogenes, lineares DGL-System mit konstanten Koeffizienten von Konsistenzordnung k ist (Hinweis: Blatt 2 Aufgabe 1a).

☐ **(b)** Bestimmen Sie die Konsistenzordnung des folgenden expliziten Runge-Kutta-Verfahrens im skalaren Fall $\dot{x} = f(t, x)$:

$$\begin{array}{c|cc} 0 & & \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \\ \hline & 0 & 1 \end{array}$$

Aufgabe 2: Verfahrensfunktion (schriftlich)

Bestimmen Sie die Verfahrensfunktion gemäß Abschnitt 2.2 der Vorlesung im Falle eines inhomogenen, linearen DGL-Systems mit konstanten Koeffizienten für

☐ **(a)** das explizite Runge-Kutta-Verfahren aus Aufgabe 1b.

☐ **(b)** die implizite Mittelpunktsregel (Hinweis: Neumann-Reihe).

Aufgabe 3: Welches ist die schnellste Bahn?

Im Folgenden betrachten wir die Bewegung einer Masse $m > 0$ im Gravitationsfeld $g = (0, -10)^T \in \mathbb{R}^2$ auf einer gegebenen Bahn $\gamma : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$. Die Position x der Masse m zum Zeitpunkt t wird beschrieben durch $x(t) = \gamma(\sigma(t))$, wobei $\sigma : [0, T] \longrightarrow [0, 1]$ gegeben ist durch folgende Bestimmungsgleichung:

$$\ddot{\sigma}(t) = \frac{1}{\|\gamma'(\sigma(t))\|^2} \Big(mg \cdot \gamma'(\sigma(t)) - \dot{\sigma}(t)^2 \gamma''(\sigma(t)) \cdot \gamma'(\sigma(t)) \Big)$$

(a) Implementieren Sie die Bewegungsgleichung mit den numerischen Verfahren, die Sie bereits auf dem letzten Blatt implementiert haben. Testen Sie dabei drei vom Typ her verschiedene Bahnen γ, die auf $[0, 1]$ eine vorgeschriebene Höhendifferenz von 0,8 aufweisen und visualisieren Sie jeweils die Lösung.

(b) Berechnen Sie, wie lange der aus ruhender Position startende Massenpunkt vom Anfangs- bis zum Endpunkt der Bahn benötigt. Formulieren Sie dazu die Bedingung an T als Gleichung und lösen Sie diese mit dem Newton-Verfahren. Besorgen Sie sich hierfür einen geeigneten Startwert und vergleichen Sie für jede getestete Bahn jeweils die Ergebnisse für T bei Verwendung der verschiedenen numerischen Verfahren zur Lösung der DGL für σ miteinander.

(c) Stellen Sie eine Vermutung auf, welche Form die Bahn zwischen Anfangs- und Endpunkt haben sollte, um am schnellsten durchfahren zu werden.