Universität Konstanz
FB Mathematik & Statistik
Prof. Dr. M. Junk
J. Budday

Ausgabe: 25.05.2012

Abgabe: 11.06.2012
bis spätestens 10 Uhr
in die Briefkästen vor F441

Übungen zur Veranstaltung Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen

Blatt 04

Bitte kreuzen Sie die schriftlichen Teilaufgaben, die Sie in der Übungsgruppe vorrechnen könnten, direkt auf dem Übungsblatt an und geben Sie dieses mit ab.

Aufgabe 1: Adams-Moulton-Verfahren (schriftlich)

☐ **(a)** Bestimmen Sie das Adams-Moulton-Verfahren unter Verwendung von drei äquidistant liegenden Stützstellen t_{i-1}, t_i, t_{i+1} (Schrittweite h), d.h. unter Einbeziehung der vorherigen und der zukünftigen Approximation.

☐ **(b)** Wir betrachten eine skalare DGL $\dot{x} = F(t, x)$, wobei die rechte Seite F Lipschitz-stetig bezüglich x gleichmäßig in t sei. Unter welchen Voraussetzungen an die Schrittweite h existiert in diesem Fall eine eindeutige Verfahrensfunktion des Adams-Moulton-Verfahrens?

Aufgabe 2: Fixpunktiteration vs. Newton-Verfahren

Im Folgenden betrachten wir im speziellen die beiden Gauß-Verfahren "Gauß 2" (implizite Mittelpunktsregel) und "Gauß 4", welche durch folgende Butcher-Tableaus gegeben sind:

Gauß 2

$$\begin{array}{c|c} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \hline & 1 \end{array}$$

Gauß 4

$$\begin{array}{c|cc} \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4}-\frac{\sqrt{3}}{6} \\ \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{4}+\frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{4} \\ \hline & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}$$

(a) Implementieren Sie die beiden Verfahren jeweils unter Verwendung der klassischen Fixpunktiteration aus dem Banach'schen Fixpunktsatz (**nicht** *fsolve* verwenden) und überprüfen Sie Ihre Implementierung, indem Sie mit Ihrer Matlab-Datei von Blatt 2 die numerische Konvergenzordnung der beiden Verfahren bestimmen.

(b) Implementieren Sie nun das Newton-Verfahren, um die beiden impliziten Verfahren anstelle der Fixpunktiteration jeweils mit Hilfe des Newton-Verfahrens durchzuführen. Überprüfen Sie Ihre Implementierung, indem Sie mit Ihrer Matlab-Datei von Blatt 2 die numerische Konvergenzordnung der beiden Verfahren nun unter Verwendung des Newton-Verfahrens bestimmen.

(c) Vergleichen Sie Ihre Ergebnisse aus **(a)** und **(b)**, indem Sie bei jeweils identischer Abbruchkriterien für die Fixpunktiteration bzw. das Newton-Verfahren die Anzahl der benötigten Funktionsauswertungen der rechten Seite und deren Jacobi-Matrix zählen. Welche Methode ist für diesen Fall die effizientere?

- bitte wenden -

Aufgabe 3: Schrittweitensteuerung

Wir betrachten folgende Situation: Vier Personen P_i stehen an vier verschiedenen Positionen $x_i \in \mathbb{R}^2$ für $i = 1, 2, 3, 4$ und bilden dadurch ein Viereck, in welchem jeder einen ausgezeichneten "Vordermann" P_{i+1} besitzt ($P_5 := P_1$). Nun haben alle Personen die Aufgabe, immer mit konstanter Geschwindigkeit in Richtung ihres Vordermannes zu laufen. Diese Choreographie lässt sich durch folgende DGLs beschreiben:

$$\dot{x_i} = \frac{x_{i+1} - x_i}{\|x_{i+1} - x_i\|} \quad \text{für} \quad i = 1, 2, 3, 4 \ ,$$

wobei $x_5 := x_1$.

(a) Implementieren Sie eine Schrittweitensteuerung RK4(3) unter Verwendung eines Runge-Kutta-Verfahrens vierter und eines dritter Ordnung. Behalten Sie die Form Ihrer numerischen Verfahren unter Verwendung der Strukturvariablen auch für diese Matlab-Routine bei.

(b) Visualisieren Sie die beschriebene Situation mit den Anfangsbedingungen

$$x_1(0) = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad x_2(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix} \quad , \quad x_3(0) = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad x_4(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \end{pmatrix}$$

unter Verwendung der Schrittweitensteuerung und vergleichen Sie die Ergebnisse mit jenen des klassischen RKV 4ter Ordnung ohne Schrittweitensteuerung.