Universität Konstanz
FB Mathematik & Statistik
Prof. Dr. M. Junk
S. Hölle (stefan.hoelle@uni.kn)
S. Sahli (sebastian.sahli@uni.kn)

Ausgabe: 12.06.2015

Abgabe: 19.06.2015
bis spätestens 10 Uhr
in die Briefkästen vor F441

Übungen zur Veranstaltung
Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen

Blatt 04

Bitte kreuzen Sie die schriftlichen Teilaufgaben, die Sie in der Übungsgruppe vorrechnen könnten, direkt auf dem Übungsblatt an und geben Sie dieses mit ab.

Aufgabe 1: Adams-Moulton-Verfahren (schriftlich)

☐ **(a)** Bestimmen Sie das Adams-Moulton-Verfahren unter Verwendung von drei äquidistant liegenden Stützstellen t_{i-1}, t_i, t_{i+1} (Schrittweite h), d.h. unter Einbeziehung der vorherigen und der zukünftigen Approximation.

☐ **(b)** Wir betrachten eine skalare DGL $\dot{x} = F(t,x)$, wobei die rechte Seite F Lipschitz-stetig bezüglich x gleichmäßig in t sei. Unter welchen Voraussetzungen an die Schrittweite h existiert in diesem Fall eine eindeutige Verfahrensfunktion des Adams-Moulton-Verfahrens?

Aufgabe 2: Mathematisches Pendel 2

☐ **a)** Wir betrachten das mathematische Pendel von Blatt 3, Aufgabe 2, beschrieben durch die skalare, lineare DGL im normierten Fall ($m = l = g = 1$)

$$\ddot{\varphi} + \varphi = 0$$

Entscheiden Sie, ob diese DGL ein Hamiltonsystem ist, und bestimmen Sie gegebenenfalls die zugehörige Hamiltonfunktion H. **(schriftlich)**

b) Wir betrachten die Hamiltonfunktion $H(p,q) = \frac{1}{2}p^2 + 1 - \cos(q)$.
Implementieren Sie die zugehörige DGL unter Verwendung verschiedener numerischer Verfahren (explizites und implizites Euler-Verfahren, Gauß 4).
Visualisieren Sie den Verlauf der Hamiltionfunktion unter Verwendung der approximativen Lösungen mit verschiedenen Startwerten und Schrittweiten.
Bewerten Sie anschließend jeweils die numerischen Ergebnisse.

- bitte wenden -

Aufgabe 3: Das ϑ-Verfahren

Gegeben sei die DGL $\dot{x}(t) = F(t, x(t))$. Wir betrachten eine Klasse von Verfahren, deren Verfahrensvorschrift in Abhängigkeit eines Parameters $\vartheta \in [0,1]$ gegeben ist durch

$$\tilde{x}(t_{n+1}) = \tilde{x}(t_n) + h\big((1-\vartheta)F(t_n, \tilde{x}(t_n)) + \vartheta F(t_{n+1}, \tilde{x}(t_{n+1}))\big).$$

☐ **a)** Handelt es sich bei diesem Verfahren um ein Runge-Kutta-Verfahren? Wenn ja, geben sie das zugehörige Butcher-Schema an. Welche Verfahren ergeben sich für die Fälle $\vartheta = 0$ bzw. $\vartheta = 1$? **(schriftlich)**

☐ **b)** Berechnen Sie die Stabilitätsfunktion der Verfahren in Abhängigkeit von ϑ. Plotten Sie mithilfe von Matlab die Stabilitätsgebiete für verschiedene Werte von ϑ. **(schriftlich)**

c) Implementieren Sie das Verfahren aus a) in Abhängigkeit von ϑ (Übergabe als `I.theta`) und bestimmen Sie die numerischen Konvergenzordnung für verschiedene Werte von ϑ (mindestens drei). Verwenden Sie dafür die DGL von Blatt 3, Aufgabe 3. Stellen Sie eine Vermutung auf, für welche Werte von ϑ das Verfahren besonders gut wird.