



Universität Konstanz  
FB Mathematik & Statistik  
Prof. Dr. M. Junk  
S. Hölle (stefan.hoelle@uni.kn)  
S. Sahli (sebastian.sahli@uni.kn)

Ausgabe: 26.06.2015  
Abgabe: 03.07.2015  
bis spätestens 10 Uhr  
in die Briefkästen vor F441

## Übungen zur Veranstaltung Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen

Blatt 05

Bitte kreuzen Sie die schriftlichen Teilaufgaben, die Sie in der Übungsgruppe vorrechnen könnten, direkt auf dem Übungsblatt an und geben Sie dieses mit ab.

### Aufgabe 1: Schießverfahren

Eine  $1kg$ -Kugel soll an ein vorgegebenes Ziel geschossen werden. Diese Situation kann zum Beispiel durch das folgende zweidimensionale Randwertproblem beschrieben werden:

$$\ddot{x} + \alpha \dot{x} = g \quad , \quad x(0) = a \quad , \quad x(T) = b$$

wobei  $\alpha, T > 0$  und  $a, b \in \mathbb{R}^2$  und  $g = (0, -10)^T$ .

- (a) Bestimmen Sie die Lösung dieses Randwertproblems und geben Sie die Anfangsgeschwindigkeit  $\dot{x}(0)$  an, mit welcher die Kugel geschossen werden muss, um zum Zeitpunkt  $T$  an der Stelle  $b$  zu sein. **(schriftlich)**
- (b) Erweitert man das Randwertproblem zusätzlich um die Bedingung  $\|\dot{x}(0)\| = c$  so wird  $T$  zu einer zusätzlich zu bestimmenden Größe, die nicht mehr von Beginn an festgelegt werden kann.  
Lösen Sie für  $a = (0, 2)^T$ ,  $b = (60, 0)^T$ ,  $c = 45$  und  $\alpha = 0.5$  dieses freie Randwertproblem und geben Sie die Zeit  $T$  und den Winkel zur Horizontalen an, unter welchem man die Kugel unter der Zusatzbedingung abschießen muss, damit sie zum berechneten Zeitpunkt  $T$  an der Stelle  $b$  ankommt.  
**(schriftlich)**
- (c) Implementieren Sie ein Programm zur numerischen Lösung des in (a) beschriebenen Randwertproblems. Die Eingabeparameter sollen dabei frei wählbar sein.

## Aufgabe 2: Schrittweitensteuerung

Wir betrachten folgende Situation: Vier Personen  $P_i$  stehen an vier verschiedenen Positionen  $x_i \in \mathbb{R}^2$  für  $i = 1, 2, 3, 4$  und bilden dadurch ein Viereck, in welchem jeder einen ausgezeichneten "Vordermann"  $P_{i+1}$  besitzt ( $P_5 := P_1$ ). Nun haben alle Personen die Aufgabe, immer mit konstanter Geschwindigkeit in Richtung ihres Vordermannes zu laufen. Diese Choreographie lässt sich durch folgende DGLs beschreiben:

$$\dot{x}_i = \frac{x_{i+1} - x_i}{\|x_{i+1} - x_i\|} \quad \text{für } i = 1, 2, 3, 4,$$

wobei  $x_5 := x_1$ .

- (a) Implementieren Sie eine Schrittweitensteuerung RK4(3) unter Verwendung eines Runge-Kutta-Verfahrens vierter und eines dritter Ordnung. Behalten Sie die Form Ihrer numerischen Verfahren unter Verwendung der Strukturvariablen auch für diese Matlab-Routine bei.
- (b) Visualisieren Sie die beschriebene Situation mit den Anfangsbedingungen

$$x_1(0) = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x_2(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad x_3(0) = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad x_4(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \end{pmatrix}$$

unter Verwendung der Schrittweitensteuerung und vergleichen Sie die Ergebnisse mit jenen des klassischen RKV 4ter Ordnung ohne Schrittweitensteuerung.