Universität Konstanz
FB Mathematik & Statistik
Prof. Dr. M. Junk
Dipl.-Phys. M. Rheinländer

Ausgabe: 15. Feb., WS 2004/05

Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen

Projekt 2

In diesem Projekt soll die Bewegung zweier Teilchen simuliert werden, welche durch eine idealisierte Feder miteinander verbunden sind. Vereinfachend soll darüberhinaus angenommen werden, daß sich die beiden Teilchen nur entlang der x-Achse bewegen können. Bezeichnen wir mit x_1, x_2 die Position des linken bzw. rechten Teilchens mit der jeweiligen Masse $m_1, m_2 > 0$, so wird die Bewegung durch folgendes Differentialgleichungssystem beschrieben:

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 &= k\,(x_2 - x_1 - d) \\ m_2 \ddot{x}_2 &= k\,(x_1 - x_2 + d) \end{aligned}$$

Die Konstante $k = \kappa^2 > 0$ entspricht dabei der Federhärte, während $d > 0$ den Abstand der Teilchen im Entspannungszustand angibt.

0) Gib die exakte Lösung der Bewegungsgleichung für allgemeine Anfangsbedingungen an. Wie hängt die Schwingungsdauer bzw. -frequenz von der Federhärte k ab?

1a) Initialisiere die Teilchen so, daß eine reine Schwingung der "Teilchen-Hantel" zustande kommt. Löse das Anfangswertproblem numerisch mittels der folgenden Verfahren:

- explizites	RK 2-Verfahren	(modifiziertes Euler-Verfahren)
- ”	RK 4- ”	(klassisches RK-Verfahren)
- implizites	RK 2- ”	(implizite Mitelpunktsregel)
- ”	RK 4- ”	(Gauß-Verfahren 4.Stufe)
- Rosenbrock-Verfahren		(siehe Aufgabe 30, Blatt 13)

Führe mittels der exakten Lösung eine experimentelle Konvergenzstudie mit verschiedenen Werten für k durch.

1b) Wie hängt in dem Falle der expliziten RK-Verfahren die Schrittweite von der Federhärte ab, damit das Verfahren gerade noch absolut stabil ist, d.h. daß die Amplitude gedämpft wird (graphische Darstellung der Stabilitätsgebiete und der wesentlichen Parameter).

1c) Führe für alle Verfahren eine experimentelle Studie durch, wie gut die Gesamtenergie[1] des Systems bei der numerischen Simulation erhalten bleibt. Wie verhalten sich die Verfahren, wenn eine einzelne Schwingung nicht mehr zeitlich aufgelöst werden kann, d.h. daß die Schrittweite in der Größenordnung der Schwingungsdauer liegt bzw. sogar größer als diese ist. Ist auch der Gesamtimpuls $P := m_1\dot{x}_1 + m_2\dot{x}_2$ eine Erhaltungsgröße? Wie verhält er sich numerisch?

2a) Betrachte nun die Teilchenhantel in einem Kasten, dessen linke bzw. rechte Wand sich bei $-L, L$ befindet. Das Teilchenpaar soll mit nicht-verschwindender Schwerpunktsgeschwindigkeit initialisiert werden, so daß es sich aufgrund der Reflektionen an den Wänden hin- und herbewegt. Wie ist die Reflektion an den Wänden in einen numerischen Algorithmus mit konstanter Schrittweite einzubauen?

[1] Die Gesamtenergie des Systems ist durch $E := \frac{1}{2}(m_1\dot{x}_1^2 + m_2\dot{x}_2^2) + \frac{1}{2}k(x_2 - x_1 - d)^2$ definiert. Überprüfe, daß es sich bei dieser Größe tatsächlich um eine Erhaltungsgröße handelt.

2b) Bei konstanter Schrittweite ist die Wand nicht bei jedem Stoß an derselben Stelle lokalisiert. Daher ist es sinnvoll, den Zeitschritt bei Annäherung an die Wand zu verfeinern. Genauer:

- Prüfe nach jedem Zeitschritt, ob sich das Teilchen bereits hinter der Wand befindet.
- Falls ja und der Abstand Teilchen-Wand größer als ein vorgegebner Toleranzwert ist, halbiere die Schrittweite und wiederhole den Zeitschritt.
- Falls ja und der Abstand Teilchen-Wand kleiner gleich dem vorgegebenen Toleranzwert ist, reflektiere das Teilchen. Setze danach die Schrittweite wieder auf ihren Standardwert.

Beachte, daß beim Reflektieren eines Teilchens auch auf die Richtung seiner Geschwindigkeit zu achten ist, sonst bleibt es ggf. an der Wand "kleben" (dies gilt bereits für 2a).

Vergleiche die Ergebnisse mit ohne Schrittweitensteuerung für lange Laufzeiten (viele Reflektionen). Kommt es zu signifikanten Abweichungen?

2c) Ersetze die Wände durch peakartige Kraftbarrieren[2] vom Typ

$$\begin{array}{lrcl} \text{i)} & F(x) & = & \alpha e^{\beta(x+L)^2} - \alpha e^{\beta(x-L)^2} \\ \text{ii)} & F(x) & = & \frac{\alpha}{1+\beta(x+L)^2} - \frac{\alpha}{1+\beta(x-L)^2} \end{array} \qquad \alpha, \beta > 0.$$

Implementiere die fehlerbasierte Schrittweitensteuerung, wie sie in der Vorlesung vorgestellt wurde, damit das Teilchen z.B. nicht versehentlich durch die so aufgeweichten Wände "durchtunnelt". Vergleiche die Ergebnisse für unterschiedliche Werte der Kraftparameter α, β mit den Resultaten von 2b). Läßt sich Konvergenz beobachten, wenn die Peaks immer steiler und höher werden?

[2] Äußere Kräfte erscheinen in der Bewegungsgleichung durch einen zusätzlichen Term auf der rechten Seite, z.B. $m_1\ddot{x}_1 = k(x_2 - x_1 - d) + F(x_1)$.