Universität Konstanz
FB Mathematik & Statistik
Prof. Dr. M. Junk
Dipl.-Phys. M. Rheinländer

Ausgabe: 28. Okt., WS 2004/05
Übung: 02. Nov. 10-12h, V203

Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen
Aufgabenblatt 2

Aufgabe 3: Lineare Differentialgleichung mit variablen Koeffizienten

Lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten können bekanntlich mittels der Exponentialfunktion explizit gelöst werden, indem man die Exponentialmatrix der Koeffizientenmatrix (mulipliziert mit der Zeit) berechnet. Auch wenn diese analytische Lösungsmethode numerisch problematisch sein mag, da die Berechnung der Exponentialmatix i.a. aufwendig ist, wollen wir sie in dieser Aufgabe für ein Verfahren anwenden, das sich für den Fall variabler Koeffizienten eignet. Die Idee besteht darin, die variable Koeffizientenmatrix auf hinreichend kleinen Zeitintervallen durch eine konstante Matrix zu ersetzen. Durch sukzessives Lösen von Anfangswertproblemen mit konstanten Koeffizenten kann man sich so bis zu einem vorgegebenen Endzeitpunkt "hochhangeln". Die folgenden Teilaufgaben (vor allem iv) zielen darauf ab, die Konvergenz dieser Methode nachzuweisen.

i) Es sei $A \in C(\mathbb{R}_0^+, \mathbb{C}^{N\times N})$ eine stetige und beschränkte Matrixfunktion. Es gelte ferner $\sup_{t\geq 0} \|A(t)\| =: M < \infty$. Zeige, daß das Anfangswertproblem

$$x(0) = x_0 \in \mathbb{C}^N, \qquad \dot{x}(t) = A(t)\, x(t) \quad t \geq 0$$

eine auf ganz $\mathbb{R}_0^+$ definierte Lösung besitzt. Insbesondere ist die Abschätzung

$$\|x(t)\| \leq e^{Mt}\|x_0\|$$

herzuleiten. Hinweis: Welche Gleichung erfüllt $z(t) := e^{-Mt}x(t)$ und wie sieht das Monotonieverahlten von $\|z\|$ aus?

ii) Konstruiere eine stetig differenzierbare Matrixfunktion $E \in C^1(\mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}_0^+, \mathbb{C}^{N\times N})$ mit der Eigenschaft

$$x(t) = E(t,s)\, x(s) \qquad \text{für } t, s \geq 0\,.$$

E wird als *Evolutionsmatrix* bezeichnet.

iii) Betrachte nun die *inhomogene Gleichung* mit $q \in C(\mathbb{R}_0^+, \mathbb{C}^N)$.

$$y(0) = y_0 \in \mathbb{C}^N, \qquad \dot{y}(t) = A(t)y(t) + q(t) \quad t \geq 0$$

Zeige, daß die Lösung durch die Identität (Variation der Konstanten)

$$y(t) = E(t,0)\, y_0 \;+\; \int_0^t E(t,s)\, q(s)\, ds$$

gegeben ist, welche auch unter dem Namen *Duhamelsches Formel* firmiert.

iv) Es sei $X \in C^1(\mathbb{R}_0^+, \mathbb{C}^{N\times N})$ die Lösung des Anfangswertproblems

$$X(0) = I, \qquad \dot{X}(t) = A(t)X(t) \quad t \geq 0,$$

wobei $I \in \mathbb{C}^{N\times N}$ für die Identität bzw. Einheitsmatrix steht. Betrachte das kompakte Zeitintervall $[0,T]$ und setze $h := T/n$ für $n \in \mathbb{N}$ sowie $t_j := jh$ mit $0 \le j \le n$. Für $t \in [0,T]$ exitiert dann $k \in \{0,1,...,n\}$ und $\delta t \in [0,h)$ derart, daß $t = kh + \delta t$. Beweise:

$$X(t) = \lim_{n\to\infty} e^{\delta t A(t_k)}\, e^{hA(t_{k-1})} \; ... \; e^{hA(0)} \, .$$

Hinweis: Konstruiere eine Approximation X_n für X wie im Einleitungstext beschrieben. Schätze den Fehler mittels des Residuums ab, welches sich ergibt, wenn man X_n in die Differentialgleichung einsetzt. Benutze dabei die Duhamelsche Formel.

Es mag bei allen Schritten hilfreich sein, zunächst den skalaren Fall zu betrachten.

Aufgabe 4: Langzeitverhalten des Eulerschen Polygonzugverfahrens

Der ungedämpfte, eindimensionale harmonische Oszillator wird durch das folgende Differentialgleichungssystem im Phasenraum beschrieben

$$\dot{x} = Ax, \qquad A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} .$$

Die erste Komponente von $x(t) \in \mathbb{R}^2$ entspricht dabei dem Ort, während die zweite Komponente die Geschwindigkeit bzw. den Impuls angibt. Die Lösung für den Anfangswert

$$x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{lautet} \qquad x(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ -\sin(t) \end{pmatrix} .$$

Implementiere das explizite Euler Verfahren für dieses Anfangswertproblem und vergleiche die numerische Lösung mit den in der Vorlesung hergeleiteten asymptotischen Entwicklungen ($t_n = nh$)

$$\begin{aligned} \hat{u}(n) \; &:= \; x(t_n) + \tfrac{1}{2} h t_n x(t_n) + h^2 \left(\tfrac{1}{8} t_n^2 x(t_n) - \tfrac{1}{3} A x(t_n) \right) , \\ \hat{v}(n) \; &:= \; e^{\frac{1}{2} h t_n} x(t_n) - \tfrac{1}{3} h^2 t_n e^{\frac{1}{2} h t_n} A x(t_n) \, . \end{aligned}$$

Bestimme dazu die Approximationsraten von $\|\hat{x} - \hat{u}\|$ bzw. $\|\hat{x} - \hat{v}\|$ über das Zeitintervall $[0,T]$ wie in Aufgabe 2 (Blatt 1) erläutert mit

i) fester Endzeit $T = 1$

ii) gitterabhängiger Endzeit $T = \frac{4}{h}$

Welche Entwicklung beschreibt das Verfahren besser?