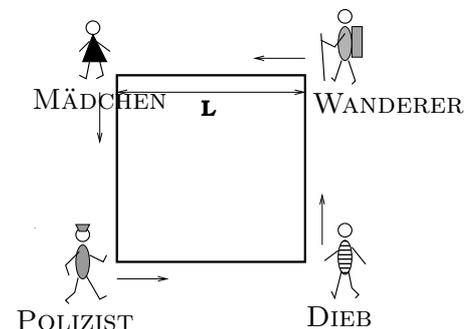


## Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen Aufgabenblatt 3

### Aufgabe 5: Rendez-vous

Ein junges Mädchen, ein Wanderer, ein Dieb und ein Polizist befinden sich an den Ecken eines quadratischen Feldes der Seitenlänge  $L$ . Zum Zeitpunkt  $t = 0$  setzen sich die vier Personen mit der Geschwindigkeit  $v$  in Bewegung. Der Wanderer läuft zum Mädchen, um es nach dem Weg zu fragen, der Dieb versucht den Wanderer zu erreichen, der Polizist verfolgt den Dieb und das Mädchen flüchtet sich zum Polizisten. Jede Person bewegt sich dabei stets genau in Richtung der betreffenden Zielperson.



- Versuche die Bahnkurven der vier Personen durch eine zeichnerische Konstruktion anzunähern. Die Zeichnung kann auch gern mittels eines Matlab-Skripts angefertigt werden.
- Stelle ein Differentialgleichungssystem auf, welches die Bewegung der Personen beschreibt. Deute den intuitiven, zeichnerischen Zugang als Eulersches Polygonzugverfahren für das Differentialgleichungssystem.
- Schreibe unter Verwendung des Eulerschen Polygonzugverfahrens ein Matlab Programm, um die Lösung des Differentialgleichungssystems mit den beschriebenen Anfangsdaten numerisch zu bestimmen. Kommt es zum Treffen?
- Finde die exakte Lösung des Anfangswertproblems und vergleiche sie mit der approximativen Lösung (Verlauf der Trajektorien, Zeitpunkt des Treffens).

Tip: Zur Berechnung der analytischen Lösung nutze man die Symmetrie des Problems aus (Invarianz unter  $90^\circ$ -Drehungen). Dadurch läßt sich das System von acht Unbekannten (4 Personen à 2 Ortskoordinaten) auf zwei Unbekannte reduzieren.

### Aufgabe 6: Modellierung einer Prüfungsvorbereitung

Ein Student der mathematischen Biologie möchte sich auf eine Prüfung in den Fächern Zoologie und Botanik vorbereiten. Dazu muß er ein 80 seitiges Lehrbuch voller lateinischer Tier- und Pflanzennamen auswendig lernen. Bei einem durchschnittlichen, täglichen Lernpensum von vier Stunden, kann er den Inhalt von sechs Seiten pro Tag aufnehmen. Allerdings glaubt er festgestellt zu haben, daß er jeden Tag ca. zehn Prozent seines Wissens wieder vergißt. Da der Student ehrgeizig ist, möchte er einerseits mit einer möglichst guten Note abschneiden, andererseits nicht zu viel Tage mit der Prüfungsvorbereitung verbringen. Um einen vorteilhaften Prüfungstermin zu finden, kommen ihm seine mathematischen Kenntnisse zu nütze.

Wieviel Tage sollte der Student für die Prüfungsvorbereitung einplanen und mit welcher Note

kann er bei einer linearen Bewertungsskala mit maximal 15 Punkten und einem fairen Prüfungsverlauf rechnen?

Löse das (diskrete) Problem zunächst exakt. Approximiere die diskrete Evolution durch eine kontinuierliche und vergleiche die Ergebnisse graphisch. Vergleiche die Prüfungsvorbereitungszeit auch mit dem Fall eines linearen Wissenszuwachses, d.h. ohne Berücksichtigung der Vergesslichkeit.

### **Aufgabe 7: Programmieraufgabe: Van-der-Pol Gleichung**

Die Van-der-Pol Gleichung tritt in der Elektrotechnik bei der Berechnung gewisser Schaltkreise auf. Versuche das folgende Anfangswertproblem numerisch mit dem expliziten Euler-Verfahren zu lösen.

$$\begin{aligned} u(0) &= 2 & \dot{u}(0) &= 0 & \mu &= 1000 \\ \ddot{u}(t) &= \mu(1 - u^2(t))\dot{u}(t) - u(t) & t &\in [0, 10] \end{aligned}$$