Universität Konstanz
FB Mathematik & Statistik
Prof. Dr. M. Junk
Dipl.-Phys. M. Rheinländer

Ausgabe: 09. Dez., WS 2004/05
Übung: 14. Dez. 10-12h, C421

Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen
Aufgabenblatt 7

Aufgabe 16: Satellitenbahnen - Restringiertes Dreikörperproblem

Erstelle ein eigenes Programm für das in der Vorlesung präsentierte Beispiel und demonstriere so auf eindrucksvolle Weise die unterschiedliche Leistungsfähigkeit folgender numerischer Integratoren (*ODE-Solver*):

1)	Euler Verfahren	feste Schrittweite
2)	Heun Verfahren	"
3)	Runge-Kutta 4	"
4)	Runge-Kutta 4(3)	Schrittweitensteuerung
5)	Runge-Kutta 5(4)	"

Folgendes Differentialgleichungssystem ist zu lösen:

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= 2\dot{y} - \partial_x V\\ \ddot{y} &= -2\dot{x} - \partial_y V\end{aligned}$$

Dabei ist die Potentialfunktion $V : \mathbb{R}^2 \setminus \{\binom{-\mu}{0}, \binom{1-\mu}{0}\} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$V(x,y) = -\frac{1}{2}(x^2+y^2) - \frac{1-\mu}{\sqrt{(x+\mu)^2+y^2}} - \frac{\mu}{\sqrt{(x-1+\mu)^2+y^2}}$$

mit $\mu = 0.012277471$. Als Anfangswerte wähle man

$$\begin{aligned}\big(x(0), y(0)\big) &= \big(0.994, 0\big)\\ \big(\dot{x}(0), \dot{y}(0)\big) &= \big(0, -2.0015851\big)\end{aligned}$$

Es ist bekannt, daß die Lösung für diese Anfangsdaten (zumindest mit sehr großer Annäherung) eine geschlossene Bahn darstellt, deren Umlaufzeit bei etwa 17.06521656 =: T liegt. Man sollte daher jedes Verfahren mindestens bis T durchlaufen lassen, um darauf zu achten, ob sich die numerisch berechnete Bahn ebenfalls schließt oder nicht.

Motivation & **Hintergrund:** Erde (relative Masse $1-\mu$) und Mond (relative Masse μ) bewegen sich um ihren gemeinsamen Schwerpunkt auf (fast) kreisförmigen Bahnen. Ihr Abstand ändert sich dabei nicht und sei hier auf 1 normiert. Das restringierte (eingeschränkte) Drei-Körper Problem beschäftigt sich mit der Frage, wie sich ein Satellit unter dem Einfluß des Schwerefeldes von Erde und Mond bewegt, ohne seinerseits die Bewegung von Erde und Mond aufgrund seiner vernachlässigbaren Masse zu stören.
Die angegebenen Gleichungen beziehen sich auf ein Koordinatensystem, welches mit konstanter Winkelgeschwindigkeit mit der Achse Erde-Mond mitrotiert. Man begründe die Bewegungsgleichungen sowie das Potential V (Tip: Aufgabe 15 Hinweis zur Transformation der Bewegungsgleichungen).

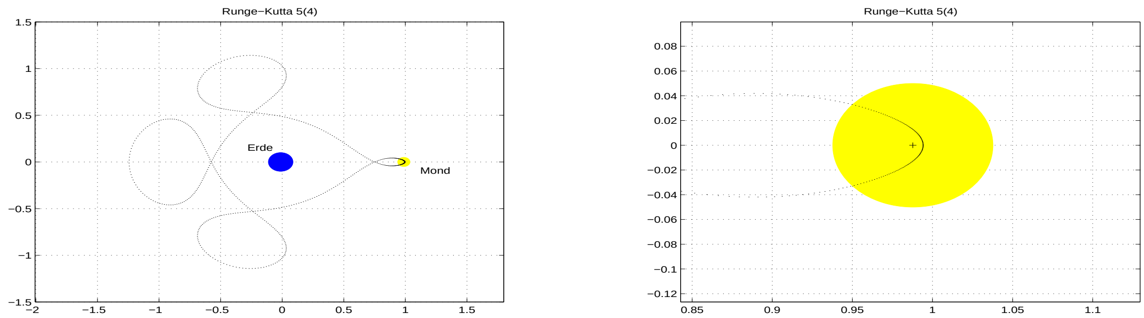

Abbildung 1: Darstellung der Bahn für die angegebenen Anfangsdaten. Beachte, daß Erde und Mond nicht maßstabsgerecht sondern zur besseren Kenntlichkeit unrealistisch groß eingezeichnet sind. Die genaue Position des Mondes ist in der Detailabbildung (rechts) durch ein + markiert.

$$
\begin{array}{c|ccccccc}
0 & & & & & & & \\
\frac{1}{5} & \frac{1}{5} & & & & & & \\
\frac{3}{10} & \frac{3}{40} & \frac{9}{40} & & & & & \\
\frac{4}{5} & \frac{44}{45} & -\frac{56}{15} & \frac{32}{9} & & & & \\
\frac{8}{9} & \frac{19372}{6561} & -\frac{25360}{2187} & \frac{64448}{6561} & -\frac{212}{729} & & & \\
1 & \frac{9017}{3168} & -\frac{355}{33} & \frac{46732}{5247} & \frac{49}{176} & -\frac{5103}{18656} & & \\
1 & \frac{35}{384} & 0 & \frac{500}{1113} & \frac{125}{192} & -\frac{2187}{6784} & \frac{11}{84} & \\
\hline
 & \frac{35}{384} & 0 & \frac{500}{1113} & \frac{125}{192} & -\frac{2187}{6784} & \frac{11}{84} & 0 \\
\hline
 & \frac{5179}{57600} & 0 & \frac{7571}{16695} & \frac{393}{640} & -\frac{92097}{339200} & \frac{187}{2100} & \frac{1}{40}
\end{array}
$$

Tabelle 1: Koeffizientenschema für das $RK5(4)$ Verfahren

Man lasse sich nicht das Vergnügen nehmen, ein wenig mit den Anfangsdaten herumzuexperimentieren und so vielleicht weitere geschlossene Umlaufbahnen zu entdecken.

Aufgabe 17: Nochmals phantastische Planetenorbits

Wende die Runge-Kutta Verfahren mit Schrittweitensteuerung (z.B. RK4(3) bzw. RK5(4)) an, um die Punkte d) und e) von Aufgabe 13 (Blatt 5) nochmals zu erledigen.