Universität Konstanz
FB Mathematik & Statistik
Prof. Dr. M. Junk
Dipl.-Phys. M. Rheinländer

Ausgabe: 16. Dez., WS 2004/05
Übung: 21. Dez. 10-12h, C421
bzw. 11. Jan. 10-12h, C421

Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen
Aufgabenblatt 8 mit Weihnachtsaufgaben

Aufgabe 18: Die Arcus-Tangens Rutsche

Ein Punktteilchen bewege sich unter dem Einfluß einer konstanten Kraft K auf dem Graphen der Funktion

$$x \mapsto \; -\alpha \arctan(\beta x) \qquad \text{mit} \quad \alpha, \beta > 0.$$

Die Kraft wirke mit der Stärke $g > 0$ in negative y-Richtung. Konkret mag man sich eine Perle vorstellen, welche aufgrund der Erdanziehung einen zu einer Arcus-Tangens Kurve gebogenen Draht reibungsfrei hinabgleitet.
Leite zunächst für die x-Koordinate eines Teilchens, das sich durch die Schwerkraft K angetrieben auf dem Graphen einer C^2 Funktion f bewegt, folgende Bewegungsgleichug her:

$$\ddot{x}(t) \; + \; \frac{f'\big(x(t)\big)}{1+f'\big(x(t)\big)^2}\Big[f''\big(x(t)\big)\;\dot{x}^2(t)+g\Big] \; = \; 0\,.$$

Löse diese Gleichung für die angegebene Funktion numerisch unter Verwendung von Runge-Kutta Verfahren mit und ohne Schrittweitensteuerung für verschiedene Parameter α, β.

Aufgabe 19: Teilchenschaukel

Zeige, daß die Bewegungsgleichung für ein Punktteilchen, welches sich unter dem Einfluß der Kraft K (siehe oben) entlang einer parametrisierten Kurve $\varphi \mapsto \binom{x(\varphi)}{y(\varphi)} \in \mathbb{R}^2$ bewegt, gegeben ist durch

$$\ddot{\phi} \; + \; \frac{x'\,x'' \; + \; y'\,y''}{x'\,x' \; + \; y'\,y'}\,\dot{\phi}^2 \; + \; \frac{g\,y'}{x'\,x' \; + \; y'\,y'} \; = \; 0\,.$$

Abkürzend ist hierbei $x' = \frac{dx}{d\varphi}(\phi(t))$; entsprechendes gilt für x'', y', y''. Beachte, daß stillschweigend eine zweimal stetig differenzierbare Parametrisierung vorausgesetzt wird.
Durch die folgende Parametrisierung wird eine *Zykloide* beschrieben.

$$\begin{aligned} x(\varphi) &= r\varphi + r\sin(\varphi) \\ y(\varphi) &= r - r\cos(\varphi) \end{aligned} \qquad \varphi \in [-\pi, \pi], \quad r > 0$$

Betrachte nun mehrere Teilchen, welche mit unterschiedlichen Auslenkungswinkeln $\phi(t=0)$ initialisiert werden. Ihre "Anfangsgeschwindigkeit" $\frac{d}{dt}\phi(t=0)$ betrage stets Null. Wie hängt die Schwingungsdauer vom anfänglichen Auslenkungswinkel ab? Versuche die Beobachtung ggf. zu beweisen. Vergleiche die *Zykloidenschaukel* mit einer *monomialen* Schaukel, bei der das Teilchen auf dem Graphen eines geraden Monoms $x \mapsto x^{2n}, n \in \mathbb{N}$ hin- und hergleitet.

Aufgabe 20: Das Brachystochronen-Problem (1. Weihnachtsaufgabe)

Durch welche Kurve sind zwei Punkte $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ mit $y_1 > y_2$ zu verbinden, damit ein Teilchen möglichst schnell unter Einwirkung der Kraft K (siehe Aufgabe 1) von (x_1, y_1) nach

(x_2, y_2) rutscht?
Überlege dir zunächst, daß die beiden Punkte durch ein (monotones) Teilstück eines Zykloidenbogens verbunden werden können. Vergleiche die zykloidale Verbindung mit einer geradlinigen sowie parabelförmigen Verbindung und einem verbindenden Kreisbogen. Ergibt sich eine Vermutung und wie ließe sich diese begründen (Tip: Variationsrechnung)?

Aufgabe 21: Der N-Schwinger (2. Weihnachtsaufgabe)

Betrachte $N \in \mathbb{N}$ Massenpunkte, welche sich entlang der x-Achse reibungsfrei bewegen können und durch idealisierte Federn miteinander verbunden sind. Das am weitesten links bzw. rechts befindliche Teilchen besitzt entweder nur eine Federverbindung (freies Ende, *Neumann Randbedingung*) oder es ist über eine zweite Feder mit einer festen Wand verbunden (festes Ende, *Dirichlet Randbedingung*). Jede Feder habe im Entspannungszustand eine bestimmte Länge. Wird diese Länge verändert, reagiert die Feder mit einer Rückstellkraft, die versucht, die Feder wieder in ihren Ruhezustand zu versetzen. Die Rückstellkraft möge proportional zur Auslenkung sein (allerdings mit umgekehrten Vorzeichen).
Führe numerische Simulationen eines derartigen N-Schwingers mit verschiedenen Randbedingungen durch. Beobachte wie sich z.B. die Störung der Ruhelage eines Teilchen über das gesamte System ausbreitet.
Vereinfachend mag man zunächst annehmen, daß die Teilchen alle dieselbe Masse bzw. die Federn alle die gleiche Ruhelänge und Härte (Steifigkeit, engl. *spring stiffness*) besitzen. Außerdem beginne man zunächst mit einem Teilchen und füge dann weitere hinzu.

Wie verhält sich die Simulation, wenn bei fester Schrittweite die Federn immer härter werden? Erkläre die Beobachtungen für Runge-Kutta Verfahren mit konstanter Schrittweite unter Bezugnahme auf die Stabilitätsbereiche (Blatt 6, Aufgabe 14). Berücksichtigt die Simulation das Prinzip der Energieerhaltung? Wie kann man die auftretenden Schwierigkeiten umgehen? Welche Nachteile hat man dennoch in Kauf zu nehmen?