Universität Konstanz
FB Mathematik & Statistik
Prof. Dr. M. Junk
Dipl.-Phys. M. Rheinländer

Ausgabe: 15. Apr., SS 2005

Numerik partieller Differentialgleichungen
Blatt 1

Aufgabe 1: Verletzte Glattheitsvoraussetzungen für Fehlerabschätzungen

Was passiert eigentlich, wenn die Glattheitsvoraussetzungen nicht erfüllt sind, welche zur Herleitung der Standard-Fehlerabschätzungen für Differenzenquotienten mittels Taylor-Reihen benötigt werden?

a) Finde Funktionen f, welche an einer Stelle $x \in \mathbb{R}$ *ein- aber nicht zweimal* (stetig) differenzierbar sind, so daß entweder

$$D_h^+ f(x) - f'(x) = \mathcal{O}(h) \qquad \text{oder} \qquad D_h^+ f(x) - f'(x) \neq \mathcal{O}(h) \qquad \text{gilt.}$$

b) Finde Funktionen f, welche an einer Stelle $x \in \mathbb{R}$ *zwei- aber nicht dreimal* (stetig) differenzierbar sind, so daß entweder

$$D_h^+ D_h^- f(x) - f''(x) = \mathcal{O}(h^2) \qquad \text{oder} \qquad D_h^+ D_h^- f(x) - f''(x) \neq \mathcal{O}(h^2) \qquad \text{gilt.}$$

Aufgabe 2: Numerische Konvergenzstudie Finiter-Differenzen Approximationen

Führe für die folgenden Finiten-Differenzen *Sterne* (engl. Stencil) numerische Konvergenzuntersuchungen durch:

$$i)\quad [0,\ -1,\ 1] \qquad ii)\quad [-1,\ 0,\ 1] \qquad iii)\quad [1,\ -2,\ 1]$$

Werte dazu den Stern für einige, selbstgewählte Funktionen an besonderen Stellen aus und berechne die Abweichung von dem Wert der zugehörigen Ableitung. Wiederhole dies für mehrere Schrittweiten h und trage die erhaltenen Abweichungen in einem doppelt-logarithmischen Diagramm gegen h auf. Betrachte auch Funktionen, bei welchen die Standard-Abschätzungen aufgrund zu geringer Regularität versagen (Aufgabe 1).
Hinweis: Für mögliche, spätere Anwendungen ist es empfehlenswert, eine MATLAB-Routine zu schreiben, welche Abweichungen und Schrittweiten als Argumente annimmt und automatisch die gewünschten Diagramme erzeugt.

Aufgabe 3: Unmögliche Differenzenquotienten

Zeige, daß es keinen dreistelligen Finite-Differenzen Stern für die erste Ableitung gibt, welcher eine Genauigkeit von dritter Ordnung erreicht. Mit anderen Worten:
Es existieren keine Gewichte $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \in \mathbb{R}$ bzw. Stützstellenfaktoren $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$, so daß für jede in einer Umgebung der Null viermal stetig differenzierbare Funktion mit einer Konstanten $C > 0$ und hinreichend kleinem $h > 0$ gilt:

$$\left| \tfrac{1}{h} \left\{ \gamma_1 f(\alpha_1 h) \,+\, \gamma_2 f(\alpha_2 h) \,+\, \gamma_3 f(\alpha_3 h) \right\} - f'(0) \right| \;<\; C\, h^3$$

Aufgabe 4: Eine Finite-Differenzen Gleichung

Welche Differentialgleichung wird durch die folgende Differenzengleichung diskretisiert?

$$f(n+1, i-1) - f(n, i) = h\omega f(n, i)$$

Die Indizes $n \in \mathbb{N}_0, i \in \mathbb{Z}$ sind dabei mit der Zeit $t = nh$ bzw. mit der Stelle $x = ih$ zu identifizieren.