Universität Konstanz
FB Mathematik & Statistik
Prof. Dr. M. Junk
Dipl.-Phys. M. Rheinländer

Ausgabe: 13. Mai, SS 2005

Numerik partieller Differentialgleichungen
Blatt 5

Aufgabe 13: 5-Punkte Stern für die zweite Ableitung

Berechne den 5-Punkte Stern für die zweite Ableitung, d.h. finde Zahlen $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ \epsilon \in \mathbb{R}$, so daß für jede sechsmal stetig differenzierbare Funktion f gilt

$$\begin{aligned} f'' &= \tfrac{1}{h^2}\,[\alpha,\ \beta,\ \overset{*}{\gamma},\ \delta,\ \epsilon]_h\, f + \mathcal{O}(h^4) \qquad \text{oder ausführlicher} \\ f''(x) &= \tfrac{1}{h^2}\Big[\alpha f(x-2h) + \beta f(x-h) + \gamma f(x) + \delta f(x+h) + \epsilon f(x+2h)\Big] \ + \ \mathcal{O}(h^4)\,. \end{aligned}$$

Antwort: $\frac{1}{12}[-1,\ 16,\ -30,\ 16,\ -1]$.

Aufgabe 14: Orts-Diskretisierung der Diffusionsgleichung $\Rightarrow$ steifes DGL-System

Bei der Diskretisierung von Evolutionsproblemen (zeitabhängigen Differentialgleichungen) geht man oftmals schrittweise vor, d.h. man diskretisiert entweder zunächst den Ort und anschließend die Zeit oder umgekehrt. Während man im letzteren Fall auf eine Folge von stationären (zeitunabhängigen) Differentialgleichungen geführt wird, gelangt man im ersten Fall auf ein gewöhnliches Differentialgleichungssystem, bei dem nur noch die Zeit als unabhängige Variable auftaucht. Dieses Differentialgleichungssystem kann unabhängig von seiner Entstehungsgeschichte im Kontext der Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen behandelt und diskretisiert werden. Als Beispiel betrachten wir abermals die Diffusionsgleichung im Intervall $[0, L]$ mit periodischen Randbedingungen:

$$\partial_t u = \nu \Delta u \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} \dot{v} = \nu L_3 v & \text{Diskretisierung mittels 3-Punkte Sterns} \\ \dot{w} = \nu L_5 w & \text{Diskretisierung mittels 5-Punkte Sterns} \end{cases}$$

Im folgenden soll die Kopplung von Orts- und Zeitschritt (siehe Aufgabe 10 a)+d)) noch einmal aus einem anderen Blickwinkel beleuchtet werden.
Erinnerung: Vorgelegt sei das Anfangswertproblem

$$x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^N, \qquad \dot{x} = Ax \tag{1}$$

mit einer konstanten Matrix $A \in \mathbb{R}^{N\times N}$. In diesem Fall ist das *explizite Runge-Kutta Schema* der Stufenzahl $1 \le s \le 4$ gegeben durch

$$\hat{x}_0 = x_0, \qquad \hat{x}_n = P_s(\Delta t\, A)\, \hat{x}_{n-1}, \tag{2}$$

wobei P_s dem s'ten Taylorpolynom der Exponentialfunktion entspricht. Die Menge $\{z \in \mathbb{C} : \ |P_s(z)| \le 1\}$ bezeichnet man als *Stabilitätsbereich.* (Warum?)

a) Berechne die Eigenwerte von L_3 bzw. L_5. Mit welcher Ordnung konvergieren sie gegen die Eigenwerte des Laplace-Operators Δ?

b) Vergleiche die Position der Eigenwerte von L_3 und L_5 mit den Stabilitätsbereichen der expliziten Runge-Kutta Verfahren bis zur vierten Ordnung. Wie ändert sich das Verhältnis des betragsmäßig größten zum betragsmäßig kleinsten Eigenwert, wenn die Zahl der Gitterpunkte zunimmt? Welche Eigenwerte des Laplace-Operators bestimmen im wesentlichen das Verhalten der exakten Lösung der Diffusionsgleichung? Welche Eigenwerte der diskretisierten Laplace-Operatoren L_3, L_5 können bei zu großem Zeitschritt zu unerwünschten Effekten führen. Wie ist der Zeitschritt in Abhängigkeit vom Ortsschritt zu wählen, um dies auszuschließen. Welches Runge-Kutta Verfahren sollte sinnvoller Weise mit L_3 bzw. L_5 kombiniert werden?

c) Implementiere alle Verfahrenskombinationen (L_3, L_5 bzw. die vier RK-Verfahren) in MatLab. Überprüfe die Vorhersagen aus b) und bestimme numerisch die Konvergenzraten anhand eines Beispiels.

d) (Setzt Kenntnisse aus den Übungen zur Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen voraus.) Ein allgemeines (explizites oder implizits) Einschrittverfahren zur Lösung von (1) läßt sich mit einer geeigneten gebrochen-rationalen Funktion Q analog zu (2) darstellen, wobei P_s durch Q zu ersetzen ist. Man bezeichnet das Verfahren als *explizit*, falls Q polynomial ist (z.B. Runge-Kuta Verfahren). Ist Q echt gebrochen rational, so heißt das Verfahren *implizit*. Der Stabilitätsbereich von Q wird wie oben definiert.

Wie sollte der Stabilitätsbereich aussehen, damit der Zeitschritt unabhängig vom Ortsschritt gewählt werden kann? Warum kann es kein explizites Verfahren geben, bei dem der Zeitschritt vom Ortsschritt entkoppelt werden kann? Wie sieht das Einschrittverfahren aus, welches hinter dem θ-Verfahren zur Diskretisierung der Diffusionsgleichung steckt?

Aufgabe 15: Hinreichendes und notwendiges Kriterium für Nullkonvergenz

Bei der Diskretisierung linearer Evolutionsgleichungen ergeben sich Rekursionen der Bauart $u_n = Au_{n-1} = A^n u_0$ mit einer quadratischen Matrix A. Das qualitative Verhalten der Folge $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ hängt dabei wesentlich von dem Verhalten der Potenzen von A ab. Dies mag zur Motivation der folgenden Definition gereichen:

Eine quadratische Matrix heißt *nullkonvergent*, falls die Folge $(M^n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen die Nullmatrix konvergiert. Zeige, daß eine quadratische Matrix M genau dann nullkonvergent ist, wenn ihr Spektralradius $\rho(M)$ echt kleiner 1 ist.

$$\rho(M) < 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad M^n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Hinweis: Der Spektralradius ist gegeben durch den Betrag des betragsmäßig maximalen Eigenwerts. Benutze die *Jordansche Normalform*.