Universität Konstanz
FB Mathematik & Statistik
Prof. Dr. M. Junk
Dipl.-Phys. M. Rheinländer

Ausgabe: 17. Juni, SS 2005

Numerik partieller Differentialgleichungen
Blatt 8

Aufgabe 20: CFL-Bedingung für elementare Diskretisierungen der Advektionsgl.

Betrachte des Anfangswertproblems für die Advektionsgleichung in dem Intervall $[0, L]$ $(L > 0)$ mit periodischen Randbedingungen.

$$v(0,x) = v_0(x), \quad v(t,0) = v(t,L), \quad \partial_t v(t,x) + a\partial_x v(t,x) = 0 \quad \text{für } (t,x) \in \mathbb{R}_0^+ \times [0,L]\ .$$

Dabei seien die Advektionsgeschwindigkeit $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und die periodische Funktion v_0 (Anfangsbedingung) gegeben.
Das kontinuierliche Problem soll mittels der folgenden expliziten Schemata[1] diskretisiert werden.

i) linksseitig: $\mathfrak{v}_j^{n+1} = \mathfrak{v}_j^n - \lambda\big(\mathfrak{v}_j^n - \mathfrak{v}_{j-1}^n\big)$

ii) rechtsseitig: $\mathfrak{v}_j^{n+1} = \mathfrak{v}_j^n - \lambda\big(\mathfrak{v}_{j+1}^n - \mathfrak{v}_j^n\big)$

iii) zentriert: $\mathfrak{v}_j^{n+1} = \mathfrak{v}_j^n - \frac{\lambda}{2}\big(\mathfrak{v}_{j+1}^n - \mathfrak{v}_{j-1}^n\big)$

iv) Lax-Friedrichs: $\mathfrak{v}_j^{n+1} = \frac{1}{2}\big(\mathfrak{v}_{j+1}^n + \mathfrak{v}_{j-1}^n\big) - \frac{\lambda}{2}\big(\mathfrak{v}_{j+1}^n - \mathfrak{v}_{j-1}^n\big)$

v) Lax-Wendroff: $\mathfrak{v}_j^{n+1} = \mathfrak{v}_j^n - \frac{\lambda}{2}\big(\mathfrak{v}_{j+1}^n - \mathfrak{v}_{j-1}^n\big) + \frac{\lambda^2}{2}\big(\mathfrak{v}_{j+1}^n - 2\mathfrak{v}_j^n + \mathfrak{v}_{j-1}^n\big)$

Hierbei indiziert n die zeitlichen Iterationen und j die räumlichen Diskretisierungsknoten (uniformes Gitter von links nach rechts numeriert). Der Parameter λ wird als *CFL-Zahl* bezeichnet. Diese ergibt sich aus der zeitlichen Schrittweite Δt, der räumlichen Gitterweite Δx und der Advektionsgeschwindigkeit a durch die Beziehung $\lambda := \frac{a\Delta t}{\Delta x}$ (anschauliche Bedeutung?).

1) Bestimme für jedes Schema den (diskreten) Evolutionsoperator.

2) Berechne das Spektrum der Evolutionsoperatoren sowie die zugehörigen Eigenvektoren.

3) Diskutiere die Spektren und Eigenwerte der diskreten Evolutionsoperatoren im Hinblick auf das kontinuierliche Problem. Lassen sich auch Aussagen über die Konvergenzordnung treffen?

4) Zeige, daß die Eigenwerte in der komplexen Ebene im allgemeinen auf Ellipsen liegen, welche nur vom Verfahren und der CFL-Zahl λ abhängen, nicht aber von der Anzahl der Gitterpunkte! Wie ergeben sich die charakteristischen Parameter der Ellipsen?

5) Wie ändert sich das Spektrum, wenn die Anzahl der Gitterpunkte erhöht wird. Betrachte insbesondere ganzzahlige Vielfache.

6) Kann man die CFL-Zahl λ für jedes Verfahren so wählen, daß das Spektrum in der abgeschlossenen Einheitskreisscheibe liegt? Wenn ja, begründe den Zusammenhang zur "anschaulichen" CFL-Bedingung, nach der der Abhängigkeitsbereich der zu diskretisierenden partiellen Differentialgleichung im Abhängigkeitsbereich des numerischen Verfahrens enthalten sein muß (analytischer AB $\subset$ numerischer AB). Welches Verfahren ist unbedingt (absolut) instabil?

[1] Falls $a > 0$, diskretisiert der linksseitige bzw. rechtsseitige Differenzenquotient die Advektionsgleichung flußaufwärts (engl. upwind) bzw. flußabwärts (engl. downwind).

Aufgabe 21: Poisson Problem mit singulärer Quelle

Beim klassischen Poissonproblem mit Dirichlet Randbedingungen auf dem Einheitsintervall fordert man, daß die Quelle in $\mathcal{C}\big((0,1)\big)$ ist und sucht die Lösung u in $\mathcal{C}\big([0,1]\big) \cap \mathcal{C}^2\big((0,1)\big)$. Will man dagegen eine Existenzaussage mittels der Greenschen Funktion $\mathscr{G}$ und der expliziten Darstellungsformel

$$u(x) = u_0 + x(u_1 - u_0) + \int_0^1 \mathscr{G}(x,\xi)\, f(\xi)\, d\xi \qquad u_0, u_1 \in \mathbb{R} \text{ (linker, rechter Randwert)} \tag{1}$$

beweisen, muß man bereits den Raum der zulässigen Quellen einschränken, da das Integral nur Sinn macht, falls der Integrand $\xi \mapsto \mathscr{G}(x,\xi) f(\xi)$ über $(0,1)$ integrierbar ist. Dies ist zum Beispiel für $f \in \mathcal{C}\big((0,1)\big) \cap \mathcal{L}^2\big((0,1)\big)$ oder für $f \in \mathcal{C}\big([0,1]\big)$ der Fall.
Bei der Konvergenzanalyse von Finite-Differenzen Verfahren schraubt man die Glattheitsanforderungen an die Lösung noch höher, um zur Bestimmung des Abschneidefehlers über die zweite Ableitung hinaus "schneidern" (taylorn) zu können.

a) Die Greensche Funktion wird im allgemeinen mit Hilfe des Fundamentalsystems konstruiert. Im vorliegenden Fall kann sie durch direktes "Hochintegrieren" gewonnen werden. Zeige, daß sich die Lösung des Poisson-Problems mit der Quelle $f \in \mathcal{C}\big([0,1]\big)$ und den Randwerten $u_0, u_1 \in \mathbb{R}$ folgendermaßen darstellen läßt.

$$u(x) = u_0 + \int_0^x \int_0^t f(s)dsdt \;-\; x\left[\int_0^L \int_0^t f(s)dsdt + u_0 - u_1\right] \tag{2}$$

Gewinne daraus eine Darstellung in in der Form von Gleichnung (1). Wie sieht die Greensche Funktion aus?

b) Betrachte die folgenden rechten Seiten mit den Randbedingungen

1) $f(x) = \frac{1}{x}, \quad u_0 = u_1 = 0,$
2) $f(x) = x^{-\frac{3}{2}}, \quad u_0 = 0$ und $u_1 = -4$.

Bestimme die analytischen Lösungen und teste mit verschiedenen Finiten-Differenzen Verfahren (siehe Aufgabe 19) wie die Numerik auf die singulären Quellen reagiert.

c) (Sonderaufgabe) Es sei $u \in \mathcal{C}\big([0,1]\big) \cap \mathcal{C}^2\big((0,1)\big)$. Gilt dann stets:

$$u(x) \stackrel{?}{=} u(0) + x\Big(u(1) - u(0)\Big) + \int_0^1 \mathscr{G}(x,\xi)\, u''(\xi)\, d\xi$$

Mit anderen Worten: Existiert zu gegebenen Quell- bzw. Randdaten eine Lösung in $\mathcal{C}\big([0,1]\big) \cap \mathcal{C}^2\big((0,1)\big)$, kann diese dann mittels (1) berechnet werden?