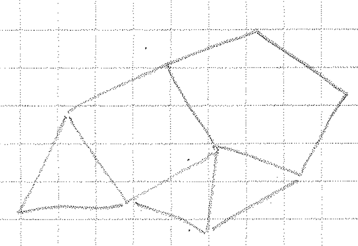
## 1.2 Triangulierung

Im FEM-Fall ist $V_h \subset \mathcal{F}(\Omega_h, K)$ $\longleftarrow$ Funktionen $\Omega_h \to K$

$\uparrow$

$\emptyset \neq \Omega_h \subset \mathbb{R}^d$

$\uparrow$



aufgebaut durch endlich viele einfache Gebiete

"einfachste" Gebiete sind konvexe Polytope

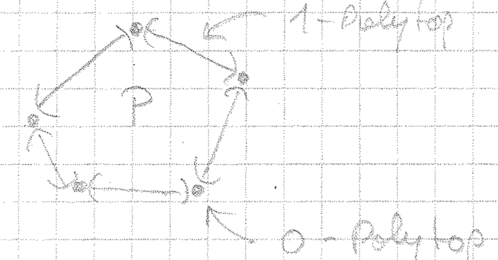
Definition 1.1a Seien $d \in \mathbb{N}$ und $k \in \mathbb{N}_0$ mit $0 \leq k \leq d$.
Wir nennen die Punkte von $\mathbb{R}^d$ auch 0-Polytope in $\mathbb{R}^d$.
Für $1 \leq k < d$ ist ein k-Polytop in $\mathbb{R}^d$ das Bild eines k-Polytops in $\mathbb{R}^k$ unter einer injektiven affin linearen Abbildung von $\mathbb{R}^k$ nach $\mathbb{R}^d$. Schließlich ist ein d-Polytop in $\mathbb{R}^d$ eine beschränkte, offene, konvexe, nicht-leere Teilmenge von $\mathbb{R}^d$, deren Rand eine endliche disjunkte Vereinigung von k-Polytopen (sog. Randpolytopen) in $\mathbb{R}^d$ ist mit $k < d$. Wir nennen $\dim(P) = k$ die Dimension und $\operatorname{edim}(P) = d$ die Einbettungsdimension eines k-Polytops $P$ in $\mathbb{R}^d$.

Beispiele:

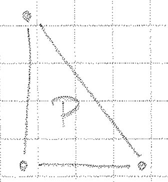
- 1-Polytope in $\mathbb{R}^1$ sind genau die Intervalle $(a,b)$ mit $a<b \in \mathbb{R}$
- 1-Polytope in $\mathbb{R}^d$ sind die Strecken $\{x+\lambda(y-x) \mid \lambda \in (0,1)\}$ $x,y \in \mathbb{R}^d$ $x \neq y$

  beachte $\{\lambda \mapsto x + \lambda z \mid x \in \mathbb{R}^d, z \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}\}$ sind die injektiven, affinen Abbildungen von $\mathbb{R}^1$ nach $\mathbb{R}^d$
- 2-Polytope in $\mathbb{R}^2$ haben polygonalen Rand

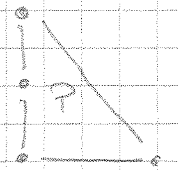
  (Rand besteht aus Strecken und Punkten)



Die Randpolytope zu $P$ sind nicht eindeutig:




oder




oder ...

aber man kann eine eindeutige, kleinstmögliche Menge von Randpolytopen angeben

Definition 1.1.c Sei $P$ ein $d$-Polytop in $\mathbb{R}^d$. Die eindeutige zugeordnete Menge von Randpolytopen wird mit $\rho(P)$ bezeichnet. Bei 0-Polytopen setzt man $\rho(P) = \emptyset$. Ist $P$ ein $k$-Polytop in $\mathbb{R}^d$ mit $0 < k < d$ dann ist $\rho(P) := A(\rho(Q))$ wobei $(Q, A)$ ein Darstellung von $P$ ist. Dabei verstehen wir unter *
Die Menge $\zeta(P) = \{P\} \cup \rho(P)$ wird Zerlegung von $P$ genannt

Bemerkung: $A(\rho(Q))$ ist unabhängig von der Wahl der Darstellung

Bemerkung: $P = ch\{x \in \mathbb{R}^d \mid x \in \rho(P)\}$

konvexe Hülle einer Teilmenge $A$ eines Vektorraums:

$$ch(A) = \{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i \mid n \in \mathbb{N},\ \lambda_i \geq 0\ \sum \lambda_i \leq 1,\ a_i \in A \}$$

---

* der Darstellung eines $k$-Polytops $P$ in $\mathbb{R}^d$ mit $0 < k \leq d$ ein Paar $(Q, A)$ bestehend aus einem $k$-Polytop $Q$ in $\mathbb{R}^k$ und einer injektiven affinen Abbildung $A: \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^d$ mit $A(Q) = P$.

**Definition 11.d** Eine endliche Menge $\mathcal{T}$ von paarweise disjunkten Polytopen in $\mathbb{R}^d$ heißt **zulässige Triangulierung** wenn jedes Polytop in $\mathcal{T}$ entweder die Dimension $\dim \mathcal{T} = \max_{P \in \mathcal{T}} \dim P$ hat oder ein Randpolytop eines $\dim\mathcal{T}$-Polytops ist d.h.

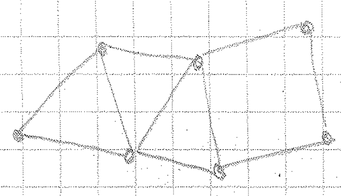
$$\forall P \in \mathcal{T} : \dim P \neq \dim \mathcal{T} \Rightarrow \exists Q \in \mathcal{T} : \dim Q = \dim \mathcal{T} \wedge P \in \rho(Q)$$

**Beispiele**

$\mathcal{T} = \emptyset$ $\quad \dim \mathcal{T} = -\infty$

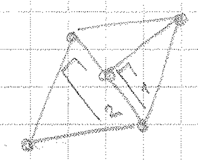
$P$ Polytop: $\mathcal{T} = \mathcal{F}(P)$ $\quad \dim \mathcal{T} = \dim P$

$\mathcal{T} = \rho(P)$ $\quad \dim \mathcal{T} = \dim P - 1$ falls $\dim P \geq 1$



$\dim \mathcal{T} = 2$ $\quad \mathcal{T}$ zulässig ✓

| $k$ | 2 | 1 | 0 |
|---|---|---|---|
| $\dim_{\mathcal{T}}^{-1}(k)$ | 4 | 10 | 7 |




$\mathcal{T}$ nicht zulässig

denn $\Gamma_1, \Gamma_2 \in \mathcal{T}$

$\Gamma_1 \cap \Gamma_2 \neq \emptyset$ und $\Gamma_1 \subsetneq \Gamma_2$

Sprechweise "hängender Knoten"

Definition 1.1e Sei $T$ eine zulässige Triangulierung.

Die höchstdimensionalen Polytope werden <u>Zellen</u> genannt

$\mathrm{cell}(T) = \dim|_T^{-1}(\dim T)$

Jedes Polytop stammt von bestimmten Zellen her:

$$\mathrm{part}: \overline{T} \longrightarrow \mathrm{Pot}(T)$$

$$P \longmapsto \{ Q \in \mathrm{cell}(T) \mid Q \in J(P) \}$$

Der Abschluss der triangulierten Menge ist

$$\overline{\Omega}(T) := \bigcup T$$

Der Rand der Triangulierung ist definiert durch

$\partial T = \bigcup_{Q \in A} J(Q)$ wobei $A = \{ Q \in T \mid \dim Q = \dim T - 1,\ |\mathrm{part}(Q)| = 1 \}$

was wieder eine Triangulierung ist (zu beweisen)

die <u>triangulierte Menge</u> ist definiert durch $\Omega(T) = \overline{\Omega}(T) \setminus \overline{\Omega}(\partial T)$

**Definition 1.1 f** Zwei Polytope $P, S$ heißen äquivalent $P \sim S$, wenn eine Darstellung $(Q, A)$ von $P$ und $(Q, B)$ von $S$ existiert. Die Klasseneinteilung $\{[P]_\sim = \{Q \in T \mid Q \sim P\} \mid P \in T\}$ heißt Polytopbasis der Triangulierung.

Zu jedem Basismitglied $[P]_\sim$ kann man sich ein $\dim P$-Polytop $B_i$ in $\mathbb{R}^{\dim P}$ als Repräsentanten wählen (Referenzpolytop).
Die Polytop-Basis kann dann mit einer Menge $\mathcal{B} = \{B_1, .., B_e\}$ identifiziert werden.

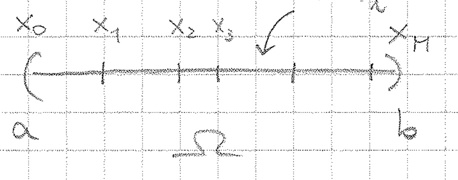
Zu jedem $P \in T$ existiert genau ein $B_i \in \mathcal{B}$ mit $P \sim B_i$

Bezeichnung: $bas(P) = B_i$

Dazu existiert auch affine Abbildung $aff(P)$ so dass $P = aff(P)(bas(P))$.

$B \in \mathcal{B}$ mit $\dim B = \dim T$ wird auch Referenzzelle genannt

Beispiele : 1D

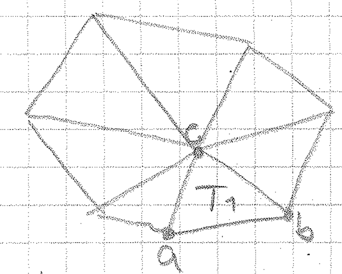



$P_i = F_i(T_{ref})$ $\quad$ $F_i(s) = x_{i-1} + s(x_i - x_{i-1})$

$T_{ref} = (0,1)$ $\leftarrow$ Repräsentant des Basis-1-Polytops

$\{0\}$ $\leftarrow$ Repräsentant des Basis-0-Polytops

2D



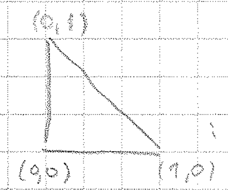

Dreiecksgitter

Repräsentanten der Basispolytope

$\{0\}$

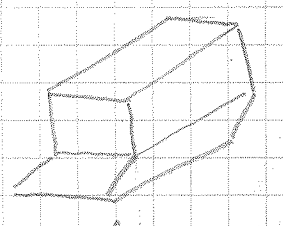
$(0,1)$

Simplex(2)




: $T_{ref}$

$P_1 = F_1(T_{ref})$ mit $F_1(s) = a + (b-a \;\; c-a)\,s$



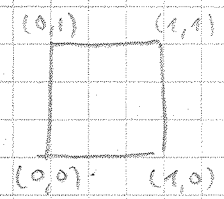
Parallelogrammgitter

Repräsentanten

$\{0\}$

$(0,1)$

Cube(2)




: $T_{ref}$

## 1.3 Funktionenräume

Sei $T$ Triangulierung mit $\dim T = d$, Zellen $T_1, \dots, T_M$ und triangulierter Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^d$. Wir definieren $E_j : \mathcal{F}(\overline{T_j}, K) \to \mathcal{F}(\Omega, K)$ Fortsetzungsoperatoren

durch $(E_j f)(x) = \begin{cases} f(x) & x \in \Omega \cap \overline{T_j} \\ 0 & x \in \Omega \setminus \overline{T_j} \end{cases}$

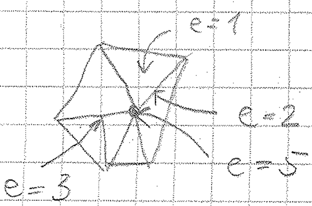
Sind $\Pi_j \subset \mathcal{F}(\overline{T_j}, K)$ Unterräume,

dann lassen sich stückweise Funktionen konstruieren durch

$$f := \sum_{j=1}^{M} E_j f_j \Big/ \sum_{j=1}^{M} E_j 1 \quad \in \mathcal{F}(\Omega, K)$$

Lemma 1.2. Sei $T$ eine Triangulierung. Dann ist $\sum_{j=1}^{M} E_j 1 \geq 1$ auf $\Omega$.

Beweis: Sei $x \in \overline{\Omega} = \overline{\bigcup T} = \bigcup \overline{T_j}$. Dann gibt es $i_0$ mit $x \in \overline{T_{i_0}}$, also $(E_{i_0} 1)(x) = 1$ ▨




$e = \sum E_i 1$

⇝ auf den Kanten sind die Funktionswerte von $f$ die arithmetischen Mittel der beteiligten Funktionen $f_j$

Definition 1.3 Das Paar $(T, \Pi)$ heißt Triangulierung mit Funktionensystem, wenn $T = (T_1, \dots, T_M)$ eine Triangulierung ist und $\Pi = (\Pi_1, \dots, \Pi_M)$ wobei $\Pi_j \subset C^0(\overline{T_j}, K)$ endlich dimensionale Teilräume sind.

Der Raum aller $(T, \Pi)$ Funktionen $f = \sum E_j f_j \,/\, \sum E_j 1$ wird mit $V(T, \Pi)$ bezeichnet.

Lemma 1.4 Sei $(T, \Pi)$ Triangulierung mit Funktionensystem.

Dann ist $\dim V(T, \Pi) = \sum_{j=1}^{M} \dim \Pi_j$

Beweis: Idee: $\varphi_{j1}, \dots, \varphi_{jN_j}$ Basis von $\Pi_j$ zeige $\psi_{jk} := \frac{1}{e} E_j \varphi_{jk}$ ist linear unabhängiges ES mit $e = \sum E_j 1$

$f \in V(T, \Pi)$ $\quad f = \frac{1}{e} \sum_j E_j f_j = \frac{1}{e} \sum_j E_j \sum_k c_{jk} \varphi_{jk} = \sum_j \sum_k c_{jk} \underbrace{\frac{1}{e} E_j \varphi_{jk}}_{\psi_{jk}} \leadsto \psi_{jk}$ ES

$\sum \lambda_{jk} \psi_{jk} = 0 \Rightarrow \sum \lambda_{jk} \psi_{jk} |_{\overset{\circ}{T_i}} = 0 \Rightarrow \sum \lambda_{ik} \varphi_{ik} |_{\overset{\circ}{T_i}} = 0 \underset{\text{Stetigkeit!}}{\Rightarrow} \sum \lambda_{ik} \varphi_{ik} = 0 \Rightarrow \lambda_{ik} = 0$ $\boxed{q.e.d.}$

Wir sehen aus dem Beweis:

$f \in V(T,\Pi)$ eindeutig durch $f|_{T_k}$ $k=1,\dots,M$ festgelegt

gilt auch für Basisfunktionen jedes Teilraums von $V(T,\Pi)$

Fähigkeit der Basis eines Teilraums $\operatorname{span}\{\varphi_1,\dots,\varphi_D\}$:

zu Zellennummer $k$, Angabe von $I_k = \{ i \mid \operatorname{supp}\varphi_i \cap T_k \neq \emptyset \}$

sowie den lokalen Funktionen $\psi_i \in \Pi_k$ mit $\varphi_i|_{T_k} = \psi_i|_{T_k}$ $\quad i \in I_k$

Wir werden mit Teilräumen

$$V(T,\Pi) \cap C^0(\Omega)$$

oder $\quad V(T,\Pi) \cap C^0(\Omega) \cap \{ f \in V(T,\Pi) \mid f|_{\partial\Omega} = 0 \}$ etc

arbeiten