## 1.5 Teilräume von $H^1(\Omega)$

**Satz 1.5** Sei $(T, \Pi)$ eine Triangulierung mit Funktionensystem, wobei $\Pi_j \subset C^1(\overline{T_j})$.
Dann gilt $V(T, \Pi) \cap C^0(\Omega) \subset H^1(\Omega)$. Für $u = \sum_{j=1}^{M} E_j u_j \in C^0(\Omega)$ $u_j \in \Pi_j$
ist $\partial_i u = \sum_{j=1}^{M} E_j \partial_i u_j$ die schwache Ableitung.

**Beweis**: Setze $w = \sum_{j=1}^{M} E_j \partial_i u_j$. Offensichtlich $u, w \in L^\infty(\Omega)$ damit $u, w \in L^2(\Omega)$

Sei $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$. Zeige $\langle u, \partial_i \phi \rangle = -\langle w, \phi \rangle$

$$\langle u, \partial_i \phi \rangle = \sum_k \int_{T_k} u_k \partial_i \phi \, dx = \sum_k \int_{T_k} \partial_i (u_k \phi) - (\partial_i u_k) \phi \, dx$$

$$= \sum_k \int_{\partial T_k} u_k \phi \, n_i^{(k)} \, dx - \langle w, \phi \rangle$$

$$= \sum_k \int_{\partial T_k \cap \operatorname{supp} \phi} u \phi \, n_i^{(k)} \, dx - \langle w, \phi \rangle$$

Es gibt $\partial T_k \cap \operatorname{supp}\phi = \partial T_k \cap \bigcup_{l \neq k} T_l \cap \operatorname{supp}\phi$

Sei $x \in \partial T_k$ aber $x \notin A = \bigcup_{l \neq k} T_l$

Da $A$ abgeschlossen gibt es $\delta > 0$ mit $B_\delta(x) \subset A^c$

Sei $\varepsilon > 0$. Setze $\tilde{\varepsilon} = \min(\varepsilon, \delta)$. Da $x \in \partial T_k$ gibt es $y, z \in B_{\tilde{\varepsilon}}(x)$ mit $z \in \mathring{T}_k$, $y \in T_k^c$

D.h. es gibt $y, z \in B_\varepsilon(x)$ mit $y \in \left(\bigcup T_l\right)^c \subset \Omega^c$ und $z \in \mathring{T}_k \subset \left(\bigcup T_l\right)^\circ = \Omega$

Damit $x \in \partial\Omega$, also $\partial T_k \cap A^c \subset \partial\Omega$.

Schließlich $\partial T_k \cap \operatorname{supp}\phi = \partial T_k \cap \operatorname{supp}\phi \cap (A \cup A^c) = \partial T_k \cap \operatorname{supp}\phi \cap A \cup \underbrace{\underbrace{\partial T_k \cap A^c}_{\subset \partial\Omega \subset \Omega^c} \cap \underbrace{\operatorname{supp}\phi}_{\subset \Omega}}_{= \emptyset}$

Es gilt $\partial T_k \cap \bigcup_{l \neq k} T_l = \partial T_k \cap \bigcup_{l \neq k} \partial T_l$

„$\supset$" wegen $\partial T_l \subset T_l$; Sei $x \in \partial T_k \cap \bigcup_{l \neq k} T_l$ dann $x \in \partial T_k \cap T_j$ $j \neq k$

Ann $x \in \mathring{T}_j$. Dann gibt es $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(x) \subset \mathring{T}_j$. Wegen $B_\varepsilon(x) \cap \mathring{T}_k \neq \emptyset$

ist dann $\mathring{T}_k \cap \mathring{T}_j \neq \emptyset$ ↯ Also $x \in \partial T_k \cap \partial T_j$

Damit: $$\sum_k \int_{\partial T_k \cap \operatorname{supp}\phi} u\phi\, n_i^{(k)}\, dx = \sum_k \sum_{\substack{l \neq k \\ |\partial T_k \cap \partial T_l| > 0}} \int_{\partial T_k \cap \partial T_l} u\phi\, n_i^{(k)}\, dx = \sum_{\substack{k < l \\ |\partial T_k \cap \partial T_l| > 0}} \Big( \int_{\partial T_k \cap \partial T_l} u\phi\, n_i^{(k)}\, dx + \int_{\partial T_l \cap \partial T_k} u\phi\, \overset{-n_i^{(k)}}{\overset{\parallel}{n_i^{(l)}}}\, dx \Big) = 0$$

VII/4

gearbeitet wird also mit

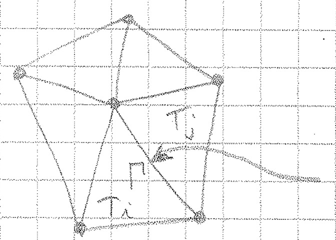
$$V(T,\Pi) \cap C^0(\Omega,K)$$

oder $\quad V(T,\Pi) \cap C^k(\Omega,K) \quad$ für ein $k>0$

oder $\quad V(T,\Pi) \cap C^0(\Omega,K) \cap \{ f \in \mathcal{F}(\Omega,K) \mid f_{\partial\Omega} = 0 \}$

etc.

Teilräume werden beschrieben durch lineare Nebenbedingungen ... Beispiel:




$$f \in V(T,\Pi) \cap C^0(\Omega,K)$$

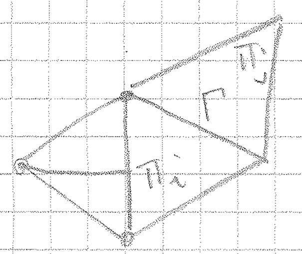
$f$ springt nicht auf $\Gamma$, d.h. für jedes $\bar{x} \in \Gamma$ ist

$$\delta_{\bar{x},i}(f) := \lim_{\substack{x \to \bar{x} \\ x \in T_i}} f(x) = \lim_{\substack{x \to \bar{x} \\ x \in T_j}} f(x) = \delta_{\bar{x},j}(f)$$

Stetigkeits-Nebenbedingungen: $\quad \delta_{\bar{x},i} - \delta_{\bar{x},j} = 0 \quad \bar{x} \in T_i \cap T_j \quad i \neq j$

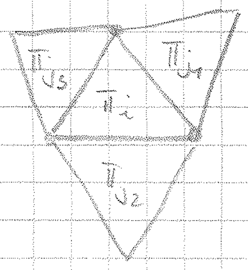
offensichtlich überbestimmtes System (mehr als $\dim V(T,\Pi)$ Bedingungen)

d.h. Stetigkeit nur mit speziellen Funktionensystemen erreichbar



1) Funktionenräume müssen zueinander passen:

$\Pi_i|_\Gamma \cap \Pi_j|_\Gamma \neq \{0\}$ sonst kann Gleichheit auf $\Gamma$ nicht hergestellt werden



2) $\dim \Pi_i|_\Gamma$ darf nicht zu groß sein,

sonst wird Stetigkeit auf allen Kanten unmöglich

günstig in diesem Sinne sind <u>Polynomräume</u> bei Triangulierungen ohne hängende Knoten:

nD-Polynome vom Grad $\leq t$ eingeschränkt auf mD-affinen Unterraum sind mD Polynome vom Grad $\leq t$ in Unterraum-Koordinaten $\rightsquigarrow$ (1), (2) erfüllt

Beispiel:

$\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3$: Polynome vom Grad $\leq 3$

$\dim \operatorname{span}\{1, x, y, x^2, xy, y^2, x^3, x^2y, xy^2, y^3\} = 10$

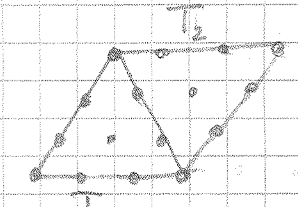
$\rightsquigarrow \dim V(T, \Pi) = 30$

Übereinstimmung an 4 Punkten genügt für Übereinstimmung auf gesamter Kante $\rightsquigarrow \dim V(T, \Pi) \cap C^0(\Omega) = 22$

zur Formulierung von Unterräumen nutze "Freiheitsgrade"

d.h. linear unabhängige Funktionale wie z.B. $\delta_{\bar{x},i}$ oder allgemeiner $\delta^{\alpha}_{\bar{x},i}$

mit $\delta^{\alpha}_{\bar{x},i}(u) = \lim\limits_{\substack{x \to \bar{x} \\ x \in T_i}} \partial^{\alpha} u(x)$




z.B. $\Pi_1, \Pi_2$ : Polynome vom Grad $\leq 3$

eindeutig festgelegt durch Funktionswerte an 10 Punkten

Stetigkeitsbedingung: $\delta_{\bar{x},1} - \delta_{\bar{x},2} = 0$ für markierte Punkte $\bar{x} \in T_1 \cap T_2$

Unterraum $U = V(T, \Pi) \cap C^0(\Omega)$ beschrieben durch 4 Restriktionen

bzw 16 verbliebene Freiheitsgrade $\Lambda_1, \dots, \Lambda_{16}$

Wähle duale Basis $\varphi_j \in U$ d.h. $\Lambda_i(\varphi_j) = \delta_{ij}$ $i = 1, \dots, 16$

stetig, stückweise Grad $\leq 3$

an einem markierten Punkt $= 1$
an allen anderen markierten Punkten $= 0$

Beispiel $P_t$ - FEM

$T_{ref}$ = Simplex$(d)$

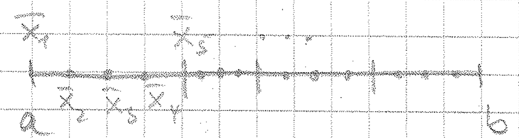
$\Pi_{ref} = P_t(d) = \{ p : T_{ref} \to \mathbb{R} \mid p(x) = \sum_{|\alpha| \le t} c_\alpha x^\alpha \quad c_\alpha \in K \}$ $\qquad \dim P_t(d) = \binom{t+d}{d}$

$d = 1$ : $\qquad T_{ref} = [0, 1]$

"Elementfreiheitsgrade" $\delta_{\bar{x}_\ell^{ref}}$ mit $0 = \bar{x}_0^{ref} < \bar{x}_1^{ref} < \ldots < \bar{x}_{t-1}^{ref} < \bar{x}_t^{ref} = 1$

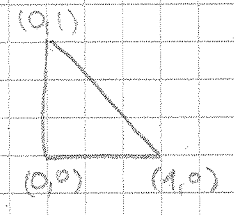
duale Basis : Lagrange - Grundfunktionen $\varphi_k^{ref}$ $\quad k = 0, \ldots, t$

Freiheitsgrade in $V(T, \Pi) \cap C^0(\Omega)$ : $\quad \delta_{\bar{x}_i}$ mit $\bar{x}_i \in \{ F_j(\bar{x}_\ell^{ref}) \mid j = 1, \ldots, M, \ \ell = 0, \ldots, t \}$




duale Basis $\varphi_j$ erfüllt : $\qquad \varphi_j\big|_{T_k} = \varphi_\ell^{ref} \circ F_k^{-1}\big|_{T_k}$ $\quad$ falls $\bar{x}_j = F_k(\bar{x}_\ell^{ref})$

$d = 2$ : $T_{ref} =$



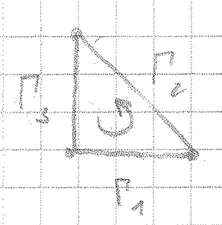

Elementfreiheitsgrade $\delta_{x_i^{ref}}$

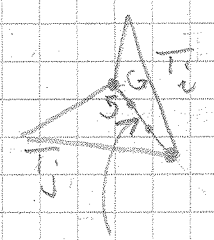
- Eckpunkte
- $t+1$ Punkte pro Kante insgesamt

$$\left.\right\} \quad 3 + 3(t+1-2) = 3t$$

- innere Freiheitsgrade $\dfrac{(t+2)(t+1)}{2} - 3t = \dfrac{(t-1)(t-2)}{2}$

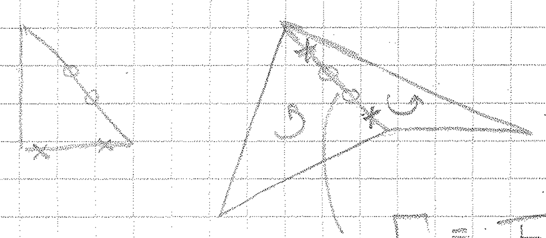
außerdem: Kantenfreiheitsgrade müssen geeignet gelegt werden




Symmetrie bzgl Kantenmittelpunkt

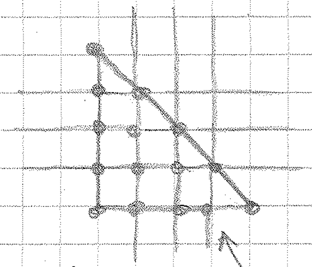
$\Gamma = F_i(\Gamma_1) = F_j(\Gamma_1)$



gleiche relative Anordnung auf allen Kanten

$$\Gamma = F_i(\Gamma_1) = F_j(\Gamma_2)$$

eine Möglichkeit: äquidistante Zerlegung entlang Kanten ($\hat{=}$ Schnitt mit kartesischem Gitter)



automatisch $\frac{(t+2)(t+1)}{2}$ Punkte

$t+1$ pro Kante

gleiche, symmetrische Verteilung

$$\bar{x}_{ij}^{ref} = \frac{1}{t}(i,j)$$
$$0 \leq i+j \leq t$$

Lemma 1. Die Elementfreiheitsgrade $\delta_{\bar{x}_{ij}^{ref}}$ $0 \leq i+j \leq t$ bilden eine Basis von $P_t(z)'$, $t \geq 1$.

Beweis: Induktion über $t$ ... es genügt lin. Unabhängigkeit zu zeigen

$t = 1$: $\sum_{0 \leq i+j \leq 1} \alpha_{ij} \delta_{\bar{x}_{ij}^{ref}} = 0$ angewendet auf $p_1(x) = x_1 + x_2 - 1 \rightsquigarrow \lambda_1 = 0$

$p_2(x) = x_1 \rightsquigarrow \lambda_2 = 0$

$p_3(x) = x_2 \rightsquigarrow \lambda_3 = 0$

$t \geq 2$, Beh richtig für $t-1$

duale Basis zu $\delta_{s_{mn}}$ mit $s_{mn} = \frac{1}{t-1}(m,n)$ $0 \leq m+n \leq t-1$ in $\mathcal{P}_{t-1}(2)$

Ann $\sum_{0 \leq i+j \leq t} \alpha_{ij} \, \delta_{\bar{x}_{ij}^{ref}} = 0$

wende an auf $\eta_{m,n}(x) = (x_1 + x_2 - 1) \cdot \psi_{m,n}\left(\frac{t}{t-1} x\right)$

nachrechnen: $\alpha_{mn} = 0 \quad 0 \leq m+n \leq t-1$

(weil $\eta_{mn}(\bar{x}_{ij}^{ref}) = 0$ wenn $i \neq m$ oder $j \neq n$)

bleibt noch $\sum_{i+j=t} \alpha_{ij} \, \delta_{\bar{x}_{ij}^{ref}} = 0$

wende an auf $\eta_m(x) = L_m(x_1)$

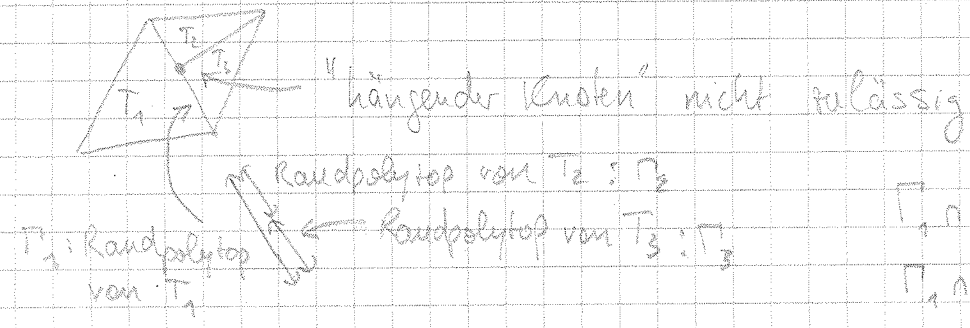
duale Basis zu $\delta_{i/t}$ $0 \leq i \leq t$ in $\mathcal{P}_1(t)$

(d.h. Lagrange-Grundpolynome)

nachrechnen: $\alpha_{mn} = 0 \quad m+n = t$

∎

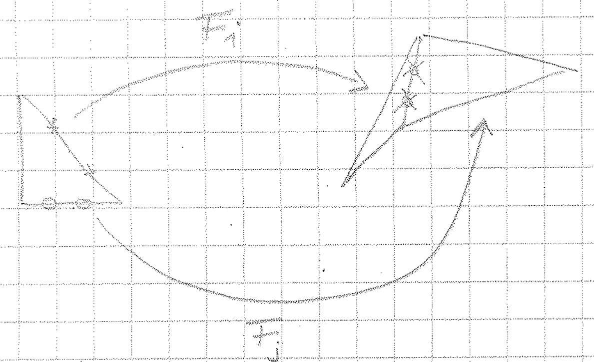
Das Zusammensetzen der Elementfreiheitsgrade funktioniert dann, wenn die Triangulierung <u>zulässig</u> ist, d.h. wenn die Randpolytope entweder disjunkt oder identisch sind




$\Gamma_1 \cap \Gamma_3 \neq \emptyset$ aber $\Gamma_1 \neq \Gamma_3$

$\Gamma_1 \cap \Gamma_2 \neq \emptyset$ aber $\Gamma_1 \neq \Gamma_2$

Ist $\Gamma \subset \Omega$ ein Randpolytop von $T_i$ und $T_j$,
dann fallen Knoten der Elementfreiheitsgrade nach Konstruktion zusammen, d.h.

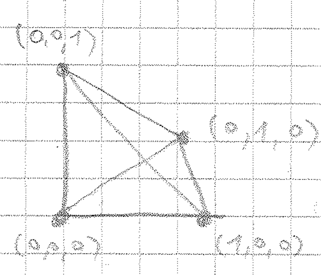



Freiheitsgrade in $V(T,\Pi) \cap C^0(\Omega)$

$\delta_{\bar{x}_i}$ mit $\bar{x}_i \in \{ F_k(\bar{x}^{ref}_{ij}) \mid 0 \le i+j \le t,\ k = 1,\dots,M \}$

und $\varphi_m|_{T_k} = \varphi^{ref}_{ij} \circ F_k^{-1}|_{T_k}$ falls $\bar{x}_m = F_k(\bar{x}^{ref}_{ij})$

$d = 3$ $\qquad T_{ref} =$




Elementfreiheitsgrade:

- Eckpunkte
- $t+1$ pro Kante insgesamt
- $\binom{t+2}{2}$ pro Facette insgesamt

$$\left.\right\} \quad \overset{\text{Ecken}}{4} + \overset{\text{innere Kanten}}{6(t-1)} + 4\,\frac{(t-1)(t-2)}{2} = 2(t^2+1)$$

- innere Freiheitsgrade $\quad \frac{(t+3)(t+2)(t+1)}{6} - 2(t^2+1) = \frac{(t-1)(t-2)(t-3)}{6}$

notwendige Symmetrien auf Facetten (analog zu 2D) werden erfüllt, wenn

$$\overline{X}^{ref}_{ijk} = \frac{1}{t}(i,j,k) \qquad 0 \le i+j+k \le t$$

Lemma 1.7 Die Elementfreiheitsgrade $\delta_{X^{ref}_{ijk}}$ $\; 0 \le i+j+k \le t$ bilden Basis von $P_t(3)$, falls $t \geq 1$

Beweis: Idee analog zu Lemma 1.5 $\boxtimes$