Kapitel 2 Approximationseigenschaften von P_t-Dreieckselementen

Grundaufgabe (A) finde $u \in V$ mit: $\forall v \in V: a(u,v) = b(v)$

Satz 2.1 (Lax-Milgram, LM)

V: Hilbertraum mit SP $\langle \cdot, \cdot \rangle_V$ und Norm $\| \cdot \|_V$

$a: V \times V \to \mathbb{R}$ beschränkte Bilinearform, d.h.

$\exists C \in \mathbb{R}: \forall u, v \in V: |a(u,v)| \leq C \|u\|_V \|v\|_V$

$b: V \to \mathbb{R}$ beschränkte Linearform

Ist a V-elliptisch: $\exists \alpha > 0: \forall u \in V: a(u,u) \geq \alpha \|u\|_V^2$

dann hat das Problem (A) eine eindeutige Lösung.

Sie erfüllt die a-priori Abschätzung $\|u\|_V \leq \frac{C}{\alpha} \|b\|_{V'}$

wobei $\|b\|_{V'} = \sup\limits_{\|v\|_V = 1} |b(v)|$.

Praktisch lösen wir für einen endlichdimensionalen Teilraum $V_h \subset V$

(N) finde $u_h \in V_h$ mit $\forall v_h \in V_h : \; a(u_h, v_h) = b(v_h)$

Satz 2.2 (Céa-Lemma)

Für die Bausteine der Aufgabe (A) seien die Voraussetzungen von (LM) erfüllt, sei u die Lösung von (A) und u_h die Lösung von (N)
Dann gilt

$$\|u - u_h\|_V \leq \frac{C}{\alpha} \operatorname{dist}(u, V_h)$$

wobei $\operatorname{dist}(u, V_h) = \inf_{w_h \in V_h} \|u - w_h\|_V$ der Abstand von u zu V_h ist.

Beweis: Galerkin Orthogonalität (GO):

$$\begin{aligned} a(u, v_h) &= b(v_h) \\ - \; a(u_h, v_h) &= b(v_h) \\ \hline a(u - u_h, v_h) &= 0 \end{aligned}$$

für alle $v_h \in V_h$

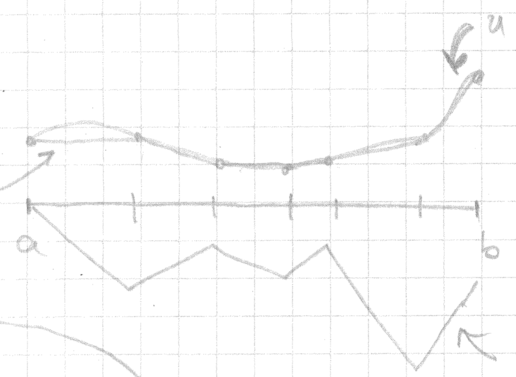
$$\alpha \|u - u_h\|_V^2 \leq a(u - u_h, u - u_h) = a(u - u_h, u) = a(u - u_h, u - w_h) \leq C \|u - u_h\|_V \|u - w_h\|$$

$\boxtimes$

Beachte: Lösung zu (N) ist gute Approximation,
wenn V_h nahe an u ist

$\rightsquigarrow$ Konvergenzfrage auf Approximationsfrage zurückgeführt !!

Sind unsere V_h-Räume gut für Approximation?



u lässt sich mit Polygonzug w_h gut annähern!

typischer Vertreter von V_h

$\mathrm{dist}(u, V_h) \leq \|u - w_h\|_V$ klein wenn Diskretisierung fein (und u regulär genug)

Ausarbeitung der Grundidee ...

Generalvoraussetzung:

Sei T eine zulässige homogene Triangulierung mit T.cell2ref = simplex(2)
(d.h. Dreiecksgitter in Dimension $d=2$)

$\Omega := \Omega(T)$ trianguliertes Gebiet

$x_1, \dots, x_N \in \overline{\Omega}$ Träger der $P_{t-1}(2)$-Auswertungsfunktionale δ_{x_i}, $t \geq 2$
$\varphi_1, \dots, \varphi_N$ duale Basis (stetig, stückweise in $P_{t-1}(2)$)
$V_h := \operatorname{span}_{\mathbb{R}}\{\varphi_1, \dots, \varphi_N\} \subseteq V \subset H^1(\Omega)$

Lemma 2.3 Sei $u \in H^m(\Omega)$ mit $m \geq 2$. Dann definiert
$I_h(u) := \sum_{i=1}^{N} \delta_{x_i}(u)\, \varphi_i$ einen stetigen linearen Operator von $H^m(\Omega)$ nach V_h,
den sogenannten Interpolationsoperator

Beweis: Wir benutzen den Sobolevschen Einbettungssatz:
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein offenes Gebiet mit Lipschitzrand.
Ist $m > d/2$ dann ist $H^m(\Omega)$ stetig eingebettet in $C^0(\overline{\Omega})$
(d.h. es existiert eine Konstante C so dass für jedes $u \in H^m(\Omega)$
eine stetige Funktion $\tilde{u} \in C^0(\overline{\Omega})$ existiert mit $u = \tilde{u}$ in $\mathcal{D}'(\Omega)$
und $\|\tilde{u}\|_\infty \leq C \|u\|_{H^m(\Omega)}$; üblicher $\tilde{u}$ wird mit u bezeichnet,
da $\tilde{u}$ eindeutig durch u festgelegt ist (denn $u \neq w$ in $C^0(\overline{\Omega}) \Rightarrow u \neq w$ in $\mathcal{D}'(\Omega)$))

Nun ist $\delta_{x_i} : C^0(\bar{\Omega}) \to \mathbb{R}$ linear und stetig
$u \mapsto u(x_i)$

$|\delta_{x_i}(u)| = |u(x_i)| \leq \|u\|_\infty$

und damit auch $\delta_{x_i} : H^m(\Omega) \to R$ $\quad |\delta_{x_i}(u)| \leq C \|u\|_{H^m(\Omega)}$

aus sobolevschem Einbettungssatz

also $$\|I_h(u)\|_V \leq \sum_{i=1}^{\tilde{N}} |\delta_{x_i}(u)| \, \|\varphi_i\|_V$$
$$\leq \left(C \sum_{i=1}^{\tilde{N}} \|\varphi_i\|_V\right) \|u\|_{H^m(\Omega)}$$ ▨

Wir nutzen $\operatorname{dist}(u, V_h) \leq \| \underbrace{u - I_h(u)}_{E_h(u)} \|_V$ zusammen mit Céa Lemma

$E_h(u)$: Interpolationsfehler

brauchen: Normabschätzung von $E_h(u)$

Strategie: lokale Untersuchung des Interpolationsfehlers in den Zellen

Dazu betrachten wir zellenbasierte Normen: $\|w\|_{m,h} := \left(\sum_{P \in T_h \text{cells}} \|w\|^2_{H^m(P)} \right)^{\frac{1}{2}}$

Lemma 2.4 Sei $w \in H^m(\Omega)$. Dann gilt $\|w\|_{m,h} = \|w\|_{H^m(\Omega)}$.

Beweis: Sei $f := \left(\sum_{|\alpha| \le m} \nabla^\alpha u\right)^2$. Dann

$$\|u\|_{m,h}^2 = \sum_{P \in T.\text{cells}} \int_P f(x)\,dx \underset{\uparrow}{=} \sum_{P \in T \setminus \partial T} \int_P f(x)\,dx = \int_{\Omega(T)} f(x)\,dx = \|u\|_{H^m(\Omega)}^2 \qquad \boxtimes$$

$P \in T \setminus T.\text{cells}$
ist Lebesgue-Nullmenge

entsprechend betrachten wir Seminormen $|w|_{k,h} = \left(\sum_{P \in T.\text{cells}} |w|_{H^k(P)}^2\right)^{\frac{1}{2}}$

$$|w|_{H^k(P)}^2 = \sum_{|\alpha| = k} \|\nabla^\alpha w\|_{L^2(P)}^2$$

es gilt dann für $w \in H^k(\Omega)$:

$$|w|_{k,h} = |w|_{H^k(\Omega)}$$

Für die Einschränkung $I_h(u)|_P$ gilt wegen

$$I_h(u)|_P = \sum_{i=1}^{N} \delta_{x_i}(u)\,\varphi_i|_P \underset{\uparrow}{=} \sum_{j=1}^{k} \delta_{x_{i_j}}(u)\,\varphi_{i_j}|_P =: I_P(u)$$

$\varphi_i|_P = 0$ wenn $x_i \notin \overline{P}$

$\{x_{i_1}, \dots, x_{i_k}\} := \{x_1, \dots, x_N\} \cap \overline{P}$

wie in Lemma 2.3: I_P wohldefiniert auf $H^m(P)$ $m \geq 2$

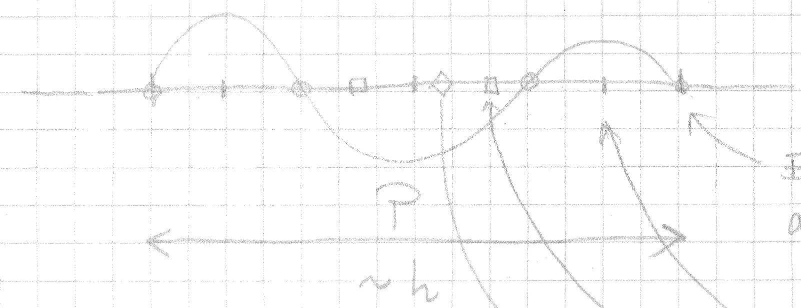
jetzt aber $I_P : H^m(P) \longrightarrow H^m(P)$ beschränkt

$\nwarrow$ da $\varphi_{i_j}|_P$ C^∞-Funktionen (Polynome)

also auch $E_P : H^m(P) \to H^m(P)$ beschränkt

$u \longmapsto u - I_h u$

Warum sollte $E_p u$ klein sein?



$E_p u = 0$ an Interpolationspunkten

$\left.\begin{array}{l} E_p u' = 0 \\ E_p u'' = 0 \\ E_p u''' = 0 \end{array}\right\}$ Rolle mehrfach

$E_p u'''' = u''''$ ← abschätzbar, wenn u glatt genug durch C

weil Interpolationspolynom Grad 3 $(t = 4)$

Hauptsatz: Ausgehend von Nullstelle über Distanz h ergibt sich $E_p u''' \sim C \cdot h$

$E_p u'' \sim (C h) \cdot h$

$E_p u' \sim (C h^2) \cdot h$

$E_p u \sim (C h^3)\, h = C h^4 = C h^t$

In einer Norm die Ableitungen vergleicht:

$$\| E_p u \|_{\substack{\text{bis zu} \\ m \text{ Ableitungen}}} \sim C h^{t-m}$$ (Schranke für m-te Ableitung ist dominant)

technische Durchführung

- Transformation auf Referenzelement
- Abschätzung von E_{ref} mit Bramble-Hilbert Lemma (Übernimmt Rolle-Anwendungen/Taylor-Argument)

Interpolationsfehler auf dem Referenzelement

Satz 2.5 (Transformationsformel)

Seien $P, Q \subset \mathbb{R}^d$ affin äquivalente offene Mengen, d.h. $P = A(Q)$ mit $A(x) = Bx + b$, $B \in \mathbb{R}^{d\times d}$ regulär. Für $u \in H^m(P)$ ist dann $u \circ A \in H^m(Q)$ und es gibt eine Konstante C abhängig von m und d, so dass

$$|u \circ A|_{H^m(Q)} \le C \, \|B\|^m \, |\det B|^{-\frac{1}{2}} \, |u|_{H^m(P)}$$

Beweis: $$|u \circ A|_{H^m(Q)} = \int_Q \sum_{|\alpha| = m} \big(\nabla^\alpha (u \circ A)(x)\big)^2 \, dx$$

per Induktion: $\nabla^\alpha (u \circ A) = \sum_{|\beta| = m} K_{\alpha\beta}(B) \, (\nabla^\beta u) \circ A$

wobei: $K_{\alpha\beta}$ homogenes Polynom mit pos Koeffizienten vom Grad m in Komponenten von B

$|\alpha| = 0$ $K_{00}(B) = 1$ ✓, $|\gamma| = m+1$ d.h. $\gamma = \alpha + e_i$ $|\alpha| = m$ $i \in 1, .., d$

$$\nabla^\gamma (u \circ A) = \partial_i \sum_{|\beta| = m} K_{\alpha\beta}(B) (\nabla^\beta u) \circ A = \sum_{|\beta| = m} K_{\alpha\beta}(B) \sum_{k=1}^{d} B_{ki} (\nabla^{\beta + e_k} u) \circ A = \sum_{|\eta| = m+1} \underbrace{\Big(\sum_{\beta + e_k = \eta} B_{ki} K_{\alpha\beta}(B) \Big)}_{K_{\gamma\eta}(B) \text{ homogen, pos Koeff}} (\nabla^\eta u) \circ A$$

komponentenweise

Äquivalenz von Matrixnormen

wegen $|B| \le \|B\|_\infty E \le C_0 \|B\| E$; $|K_{\alpha\beta}(B)| \le K_{\alpha\beta}(C_0 \|B\| E) = K_{\alpha\beta}(C_0 E) \, \|B\|^{|\alpha|}$

Matrix mit $E_{ij} = 1$ für alle i,j

pos Koeff (Monoton in jeder Komponente von B)

homogen vom Grad $|\alpha|$

$$\sum_{|\alpha|=m} \left(\nabla^\alpha (u \circ A) \right)^2 \underset{\substack{\text{C.S.} \\ \text{auf } \beta\text{-Summe}}}{\le} \sum_{|\alpha|=m} \sum_{|\beta|=m} K_{\alpha\beta}(B)^2 \sum_{|\alpha|=m} \sum_{|\beta|=m} \left((\nabla^\beta u) \circ A \right)^2$$

$$\le C^2 \|B\|^{2m} \sum_{|\beta|=m} \left((\nabla^\beta u) \circ A \right)^2$$

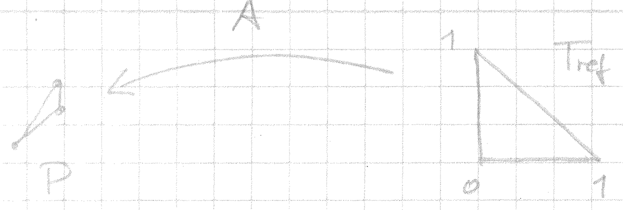
$$|u \circ A|^2_{H^m(Q)} \le C^2 \|B\|^{2m} \int_{A^{-1}(P)} \sum_{|\beta|=m} \left((\nabla^\beta u)(Ax) \right)^2 dx = C^2 \|B\|^{2m} |\det B|^{-1} \int_P \sum_{|\beta|=m} (\nabla^\beta u(y))^2 \, dy$$

$Ax = y$

$dy = |\det B| \, dx$

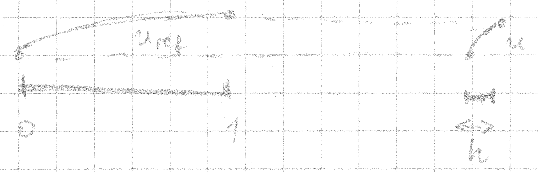
$$= C^2 \|B\|^{2m} |\det B|^{-1} |u|^2_{H^m(P)}$$

$\boxtimes$



$B \sim h \qquad \det B \sim h^2 \qquad \|B\| \sim h$

$|u_{ref}|_{H^m} \leq h^{m-1} |u|_{H^m}$



$|u|_{H^m} \geq \frac{1}{h^{m-1}} |u_{ref}|_{H^m}$

Durch Stauchung A werden Ableitungen vergrößert

$$(E_p u) \circ A = u \circ A - \sum \underbrace{\delta_{x_i}}_{= A(x_e^{ref})}(u) \underbrace{\varphi_i|_p \circ A}_{= \varphi_e^{ref}} = u \circ A - \underbrace{\sum \delta_{x_e^{ref}}(u \circ A)\, \varphi_e^{ref}}_{I_{ref}(u \circ A)} =: E_{ref}(u \circ A)$$

Eigenschaft : $0 = E_{ref}(w)(x_e^{ref}) = \delta_{x_e^{ref}}(E_{ref}(w))$ für alle l

bedeutet $E_{ref}(q) = 0$ für $q \in P_{t-1}(2)$ da $\delta_{x_e^{ref}}$ Basis von $P_{t-1}(2)'$

d.h. $P_{t-1}(2) \in \ker E_{ref}$, $E_{ref} : H^m(T_{ref}) \to H^m(T_{ref})$ $\quad m \geq 2$

Satz 2.6 (Bramble - Hilbert Lemma)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein Gebiet mit Lipschitzrand und $L : H^t(\Omega) \longrightarrow Y$ eine stetige lineare Abbildung in einen normierten Raum Y.

Ist $P_{t-1}(d) \subset \ker L$, so gilt $\|Lu\|_Y \leq C \|L\| \, |u|_{H^t(\Omega)}$ für alle $u \in H^t(\Omega)$ mit einer u-unabhängigen Konstante C.

$\|L\|$ ist dabei die Operatornorm von L.

Beweisidee:

$\|Lu\|_Y \leq \|L\| \, \|u\|_{H^t(\Omega)}$ da L stetig

Wähle $q \in P_{t-1}$

Dann $\nabla^\alpha q = 0$ für $|\alpha| = t$ also $\|u-q\|^2_{H^t(\Omega)} = \sum_{0 \leq s \leq t} |u-q|^2_{H^s(\Omega)} = \|u-q\|^2_{H^{t-1}(\Omega)} + |u|^2_{H^t(\Omega)}$

$|w|^2_{H^s(\Omega)} = \sum_{|\alpha|=s} \|\nabla^\alpha w\|^2_{L^2(\Omega)}$

$\|Lu\|_Y = \|L(u-q)\|_Y \leq \|L\| \left(\|u-q\|^2_{H^{t-1}(\Omega)} + |u|^2_{H^t(\Omega)} \right)^{\frac{1}{2}}$

$$\|Lu\|_Y \leq \|L\| \Big(\underbrace{\inf_{q \in P_{t-1}(\Omega)} \|u-q\|^2_{H^{t-1}(\Omega)}}_{\mathrm{dist}_{H^{t-1}(\Omega)}(u, P_{t-1})^2 \;\underset{\text{zu zeigen}}{\leq}\; \tilde{C} \, |u|^2_{H^t(\Omega)}} + |u|^2_{H^t(\Omega)} \Big)^{\frac{1}{2}}$$

(vergleiche: u - Taylorpolynom zu u vom Grad $t-1$ $\leq$ Restglied abhängig nur von t-ter Ableitung)