Sei Π die $\mathbb{L}^2(\Omega)$-Orthogonalprojektion auf P_{t-1}

(mit Gram-Schmidt ONB q_i bzgl $\langle\,,\rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)}$ auf P_{t-1} berechnen; $\Pi u = \sum \langle u, q_i\rangle q_i$)

Dann gilt $c\,\|u\|^2_{H^t(\Omega)} \leq |u|^2_{H^t(\Omega)} + \|\Pi(u)\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)}$ für ein $c>0$

durch Widerspruch: gäbe es kein solches c, dann gäbe es $u_n \in H^t$

mit $\frac{1}{n}\|u_n\|^2_{H^t} > |u_n|^2_{H^t} + \|\Pi(u)\|^2_{\mathbb{L}^2}$

also $|v_n|_{H^t} + \|\Pi v\|^2_{\mathbb{L}^2} < \frac{1}{n}$ $\quad v_n = \frac{u_n}{\|u_n\|_{H^t}}$

Sobolev: (v_n) hat konvergente TF in $H^{t-1}(\Omega)$

- $v = \lim v_{n_k}$ erfüllt $\nabla^\alpha v = 0$ in $\mathcal{D}'(\Omega)$ für $|\alpha| = t$
- damit $v \in P_{t-1}$ also $\Pi v = v$
- wegen $0 = \lim \|\Pi v_{n_k}\|_{\mathbb{L}^2} = \|v\|_{\mathbb{L}^2}$ ist $v = 0$ also $\lim \|v_{n_k}\|_{H^{t-1}} = 0$
- damit $1 = |v_{n_k}|^2_{H^t} + \|v_{n_k}\|^2_{H^{t-1}} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$ ↯

$$\nabla^\alpha \Pi u = 0,\ |\alpha| = t$$

Dann $$\operatorname{dist}_{H^{t-1}}(u, P_{t-1})^2 \le \| u - \Pi u \|^2_{H^{t-1}} \le \| u - \Pi u \|^2_{H^t} \le \frac{1}{c}\Big(|u - \overbrace{\Pi u}|^2_{H^t} + \| \underbrace{\Pi(u - \Pi u)}_{=0} \|^2_{L^2} \Big)$$
$$= \tilde{C} |u|^2_{H^t} \quad \text{mit} \quad \tilde{C} = 1/c$$

$\blacksquare$

Korollar 2.7 Für das $P_{t-1}(2)$ Referenzelement gilt die Interpolationsabschätzung

$$\| E_{ref}(w) \|_{H^m(T_{ref})} \le K |w|_{H^t(T_{ref})} \qquad m \le t, \ t \ge 2$$

mit einer Konstante K, die nicht von w abhängt.

Lemma 2.8. Sei P eine Zelle der Triangulierung mit $P = B T_{ref} + b$.
Ist $u \in H^t(P)$ mit $t \ge 2$ und $m \le t$, dann gilt

$$|E_P u|_{H^m(P)} \le C \left(\|B^{-1}\| \|B\| \right)^m \|B\|^{t-m} |u|_{H^t(P)}$$

Beweis:
$$|E_{ref}(u \circ A)|_{H^m(T_{ref})} \underset{\text{Korollar 2.7}}{\le} K |u \circ A|_{H^t(T_{ref})} \underset{\text{Satz 2.5}}{\le} K C \|B\|^t |\det B|^{-\frac{1}{2}} |u|_{H^t(P)}$$

$$|E_P(u)|_{H^m(P)} = |E_P(u) \circ A \circ A^{-1})|_{H^m(P)} \underset{\text{Satz 2.5}}{\le} C \|B^{-1}\|^m |\det B^{-1}|^{-\frac{1}{2}} |\underbrace{E_P(u) \circ A}_{E_{ref}(u \circ A)}|_{H^m(T_{ref})}$$

$\blacksquare$

Für $u \in H^t(\Omega)$ folgt $\quad \| E_h u \|_{m,h}^2 = \sum_{P \in T.\text{cells}} \| E_h u|_P \|_{H^m(P)}^2 = \sum_{P \in T.\text{cells}} \| E_P u \|_{H^m(P)}^2$

$$\leq \sum_{P \in T.\text{cells}} C_P^2 \left(\| B_P^{-1} \| \, \| B_P \| \right)^{2m} \| B_P \|^{2(t-m)} |u|_{H^t(P)}^2 \qquad \text{wenn} \quad P = B_P T_{ref} + b_P$$

$$\leq \left(C_P \left(\max_{P \in T.\text{cells}} \| B_P^{-1} \| \, \| B_P \| \right)^m \left(\max_{P \in T.\text{cells}} \| B_P \| \right)^{t-m} |u|_{H^t(\Omega)} \right)^2$$

Definition 2.9. Sei T eine homogene Triangulierung in $\mathbb{R}^d$ mit $T.\text{dim} = d$ und Referenzzelle T_{ref}. Zu $P \in T.\text{cells}$ sei (T_{ref}, A_P) Darstellung von P und $B_P = A_P'$. Dann nennen wir

$$h(T) = \max_{P \in T.\text{cells}} \| B_P \|$$ die Gitterweite von T und

$$\kappa(T) = \max_{P \in T.\text{cells}} \| B_P \| \, \| B_P^{-1} \|$$ die Quasiuniformitätskonstante von T

Dabei ist $\| \cdot \|$ die Matrixnorm zur euklidischen Norm auf $\mathbb{R}^d$.

Satz 2.10 Sei $u \in H^t(\Omega)$ mit $t \geq 2$ und $m \leq t$. Dann gilt unter unseren Generalvoraussetzungen

$$\| E_h u \|_{m,h} \leq C \, K(T)^m \, h(T)^{t-m} \, |u|_{H^t(\Omega)}$$

Beweis: Lemma 2.4 + Lemma 2.8 ∎

Definition 2.11. Sei $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Triangulierungen mit $\Omega(T_n) = \Omega$ für ein $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ und $\lim_{n \to \infty} h(T_{h_n}) = 0$. Dann heißt (T_n)

quasiuniform, wenn ein $C \geq 0$ existiert mit $K(T_n) \leq C$ für alle n

Satz 2.12 Sei $t \geq 2$ und $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine quasiuniforme Familie von zulässigen Triangulierungen mit simplex(2) als Referenzzelle und seien (V_n) die zugehörigen $P_t(2)$ Räume. Dann gilt für den Interpolationsfehler einer Funktion $u \in H^t(\Omega)$

$$\| u - I_{h_n} u \|_{m,h} \leq C h_n^{t-m} |u|_{H^t(\Omega)}$$

mit einer u und n unabhängigen Konstante C

Korollar 2.13 Sei $u \in H^t(\Omega)$ Lösung der Grundaufgabe mit $t \geq 2$
Weiter seien $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ die Lösungen der zugehörigen numerischen Aufgabe auf den Vektorräumen (V_n) aus Satz 2.9. Sind die Voraussetzungen des Céa Lemmas erfüllt, dann gilt

$$\| u - u_n \|_{H^1(\Omega)} \leq C h_n^{t-1} |u|_{H^t(\Omega)}$$

verlangt höhere Regularität als LM zusichert

Abschätzung aus Korollar 2.13 $\|u - u_T\|_{H^1(\Omega)} \leq C\, h(T)^{t-1} |u|_{H^t(\Omega)}$

Trick in der Numerik: zum Testen der Genauigkeit von Algorithmen

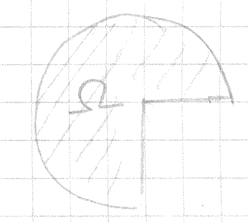
a elliptische, stetige Bilinearform auf $H^1(\Omega)$

wähle glatte Fkt $U \in H^t$, definiere $b(v) = a(U,v)$ löse $a(u,v) = b(v)$

$\rightsquigarrow u = U \in H^t$ ist eindeutige Lsg

Lemma 2.14: Eine höhere Regularität der Lösung liegt im allgemeinen nicht vor

Beweis: konkretes Beispiel $\Omega := \operatorname{int}\{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| \leq 1 \wedge x_2 \geq 0 \vee x_1 \leq 0\}$



$V := H^1_0(\Omega)$

$a(u,v) := \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx$

$b(v) = \int_\Omega f\, v \, dx$

mit $f \in H^s(\mathbb{R}^2)$ für alle s

genauer

$f(x,y) = \Delta\Big[\underbrace{\chi(x^2+y^2)\, \operatorname{Im}\big((x+iy)^{\frac{2}{3}}\big)}_{F}\Big]$

mit $\chi \in C^\infty(\mathbb{R})$, $\chi \geq 0$,

$\chi|_{(-\infty, 1/4)} = 0$, $\chi|_{(3/4, \infty)} = 1$

aber $u \in H^1_0(\Omega) \setminus H^2(\Omega)$

$\uparrow$

Lsg des Problems

$\forall v \in V: a(u,v) = b(v)$

Lösung ist $u(x,y) = \operatorname{Im}(x+iy)^{2/3} - F(x,y)$

Satz 2.15: (Regularitätssatz)

Sei a eine H_0^1-elliptische Bilinearform zum Dirichletproblem einer elliptischen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit glatten Koeffizienten auf einem Gebiet Ω. Ist die lineare Form b der Variationsformulierung durch $b(v) = \int_\Omega f v \, dx$ gegeben mit $f \in \mathbb{L}^2(\Omega)$ und ist Ω konvex, dann ist die Lösung u in $H^2(\Omega)$ und es existiert eine Konstante C unabhängig von f und u, mit $\|u\|_{H^2} \leq C \|f\|_{\mathbb{L}^2}$.

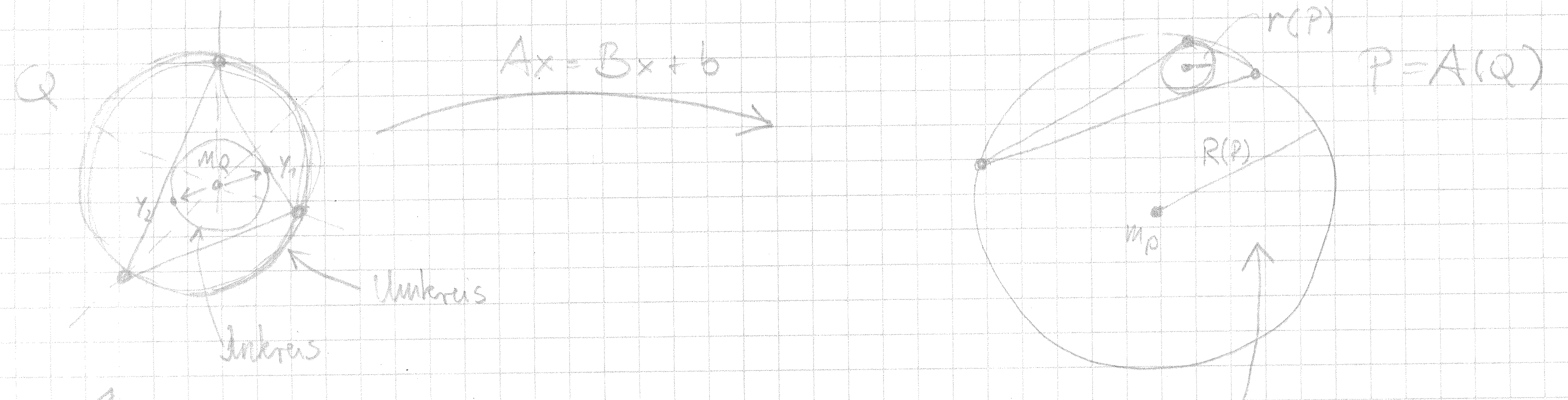
Gegenbeispiel in Lemma 3.1 existiert nur, weil Ω nicht konvex (Singularität an der Innenecke)

Für die Situation aus Satz 2.15 greift das Konvergenzresultat in Korollar 2.13: $\|u - u_T\|_{H^1} \leq C h(T) \|f\|_{\mathbb{L}^2}$

beachte: Fehlerkonstante in a-priori Fehlerabschätzung $\|u - u_T\| \leq C |u|_{H^t}$

hängt ab von $K(T)$ und $h(T)$

$K(T)$, $h(T)$ abhängig von $\|B_p\|$, $\|B_p^{-1}\|$ ... geometrische Interpretation:



fast gleichseitig

$r(Q) \approx R(Q)$

stark deformiert

$y_1 = m_Q + r(Q)e$

$y_2 = m_Q - r(Q)e$

$\|e\| = 1$ $\quad r(P) \ll R(P)$

$A(y_1), A(y_2) \in B_{R(P)}(m_P)$ also

$$2R(P) \geq \|A(y_1) - A(y_2)\| = \|B(y_1 - y_2)\| = 2r(Q)\|Be\| \rightsquigarrow \|B\| = \sup_{\|e\|=1} \|Be\| \leq \frac{R(P)}{r(Q)}$$

analog: $\operatorname{diam}(P) = \sup_{u,v \in Q} \|A(u) - A(v)\| \geq \|A(y_1) - A(y_2)\| = 2r(Q)\|Be\| \rightsquigarrow \|B\| \leq \frac{\operatorname{diam}(P)}{2r(Q)}$